Matemáticas 3

Olga Saiz Maregatti
Viktor Ignatius Blumenthal Gottlieb

serie enlaces

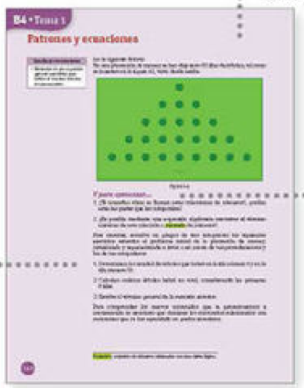
castillo
A Macmillan Education Company

ENTRADA DE BLOQUE

Al iniciar el bloque, encontrarás los aprendizajes esperados y los contenidos que aprenderás.

Experiencias cotidianas

Esta página te permite recordar los contenidos necesarios para abordar el nuevo tema a partir de situaciones cotidianas.



Ejercicios de aplicación

Los ejercicios planteados te permitirán aplicar estos conceptos que necesitarás para comprender los nuevos contenidos.

Y para comenzar…

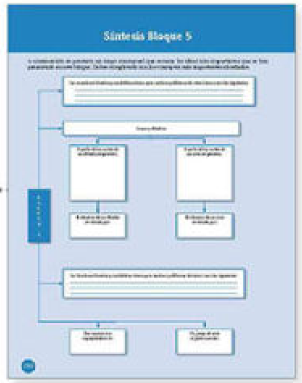
Las preguntas realizadas en esta sección te permitirán recordar y reflexionar acerca de los conceptos necesarios que debes dominar para comprender los nuevos contenidos.

Y para finalizar…

A través de esta actividad de cierre y reflexión, evaluarás tu aprendizaje sobre cada tema de los bloques.

Comprueba tus conocimientos del tema

Al final de cada tema encontrarás ítems que te permitirán evaluar tu aprendizaje.

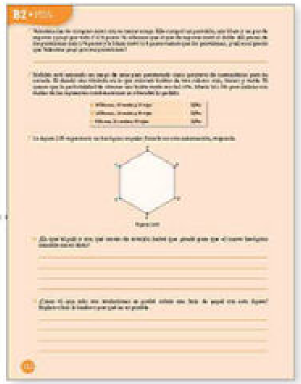


Síntesis del bloque

A través de un mapa conceptual esta sección te permite organizar los conceptos relevantes o fundamentales de cada bloque.

Comprueba tus conocimientos del bloque

Esta página te permite aplicar y evaluar todo lo aprendido en el bloque.



Evaluación PISA

En esta sección encontrarás material adicional para evaluar tu prueba PISA.

Evaluándonos

Esta sección te permitirá conocer tu desempeño en el bloque, evaluado por tí, por tus compañeros y por tu maestro.

Habilidades a desarrollar: Describir, calcular, resolver.

Sección que te permitirá a través de breves aplicaciones, ejercitar lo aprendido.

PROBLEMA RESUELTO

Se desarrollan modelos de resolución de problemas que te servirán posteriormente y se dejan planteados algunos problemas que debes resolver con la ayuda entregada en la solución.

Links de interés

Entrega recursos web donde podrás complementar, practicar y ampliar tus conocimientos.

Glosario: entrega la definición o explicación de aquellas palabras difíciles o dudosas.

Recuerda y registra…

Sección que te permite recordar y registrar los conceptos relevantes tratados en cada tema.

Más que…

Extiende los conocimientos recién adquiridos a otras áreas del conocimiento o a la misma matemática de manera más amplia.

Sabías que…

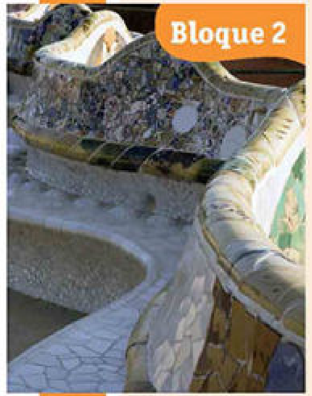
Relaciona las matemáticas con aplicaciones tecnológicas y también con situaciones de la vida diaria o el entorno.

Biografía

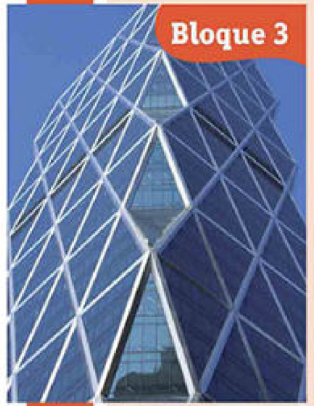
Te ofrece información relevante de quienes han contribuido al conocimiento científico.

Bloque 1

Bloque 2

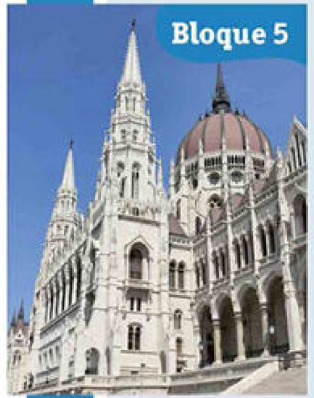


Bloque 3



Bloque 4

Bloque 5



Este libro se enfoca en situaciones contextualizadas y que promueven en el alumno el trabajo tanto en equipo como individual, de modo que sean capaces de resolver autónomamente las situaciones planteadas, pero sin dejar de lado al maestro como una pieza fundamental para promover y afianzar cada aprendizaje de modo que los alumnos se apropien de cada nuevo conocimiento y sean capaces de extenderlos a situaciones nuevas y desafiantes. Asimismo, se entregan herramientas informáticas para que los alumnos experimenten la cercanía entre los nuevos contenidos y la tecnología.

Cada tema comienza con un pequeño relato o historia seguida de preguntas que muestran la necesidad de manejar conceptos y contenidos ya revisados en grados anteriores, para abordar y comprender los nuevos aprendizajes. Para practicar en estos contenidos, se entregan algunos ejercicios que ayudarán a activarlos y recordarlos, para poder enfrentar los nuevos contenidos de la mejor manera posible.

El desarrollo de cada tema está apoyado con situaciones cotidianas y siguiendo un hilo conductor que va desde lo simple a lo complejo y finalizando este desarrollo con una pequeña actividad que desafíe a los alumnos a poner en práctica lo recientemente aprendido. Al finalizar cada tema, se entrega un conjunto de ejercicios que permite asentar estos conocimientos.

A modo de cierre, cada bloque cuenta con un mapa conceptual, que debe ser completado por los alumnos, y que resume los conceptos más importantes del bloque, seguido de un conjunto de ejercicios que abarcan todos los contenidos del bloque.

Presentación para los alumnos

En este nuevo año, tu misión es profundizar aún más en conocimientos que te entregarán una amplia visión de nuestro entorno, para que seas capaz de visualizar como en cada acto que realizamos a través de nuestra vida están presente las matemáticas, aun cuando esta te resulte lejana y sin un nexo claro con tus actividades cotidianas.

El texto desarrolla cada contenido de una manera cercana y amigable de modo que visualices como cada contenido está presente en nuestra vida, asimismo, encontrarás ejercicios contextualizados de modo que puedas poner en práctica tus nuevos conocimientos. Así, estarás en condición de aplicar tus nuevos aprendizajes en situaciones de tu entorno en las cuáles creías imposible realizar esta relación.

Competencias que se favorecen en el desarrollo de cada uno de los bloques del libro

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Presentación a los maestros

A través de la historia el ser humano ha ido desarrollando soluciones a los diversos problemas que se le han ido presentando, tanto desde el punto de vista cotidiano como tecnológico, encontrándose en algunos casos con que la solución a un problema cotidiano se podía aplicar a una situación no solo individual, sino que abarcara a toda su comunidad. De esta manera, se ha ido desarrollando la sociedad hasta nuestros días, contando en la actualidad con un sinnúmero de soluciones y alternativas a muchos de nuestros problemas y necesidades. Aun así, cada día surgen nuevas problemáticas que, dada la vorágine de información con que nos enfrentamos a diario, nos desafía a tomar decisiones de manera rápida pero a la vez informada y fundamentada de modo de poder entregar una solución a una gran cantidad de ciudadanos. De esta forma es necesario dominar los fundamentos en los cuáles se basan estas soluciones de modo de poder participar y proponer a la vez, nuevas soluciones que faciliten nuestro diario vivir y que a la vez, preserven nuestro ambiente cada vez más frágil e inestable.

Desde esta arista, es que la propuesta de este libro es, a la vez entregar problemas que desafíen a los alumnos a aplicar sus conocimientos desde el punto de vista teórico pero también integrando conocimientos que incluyan una solución justa y masiva que favorezca a una gran mayoría.

En este libro, se entregan además direcciones de páginas web que apoyan y complementan los nuevos conocimientos y permiten que los alumnos establezcan la relación entre matemáticas y tecnología de manera amigable.

Esperamos que este libro les ayude y entregue los instrumentos necesarios para que los alumnos vean las matemáticas no solo como una herramienta que se utiliza en el salón de clases, sino como un conjunto de conocimientos que se despliegan en muchas de las situaciones que experimentan a diario.

Al finalizar el bloque, el alumno:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios mutuamente excluyentes e independientes.

Estudiarás en este bloque:

Tema 1: Patrones y ecuaciones

- Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Tema 2: Figuras y cuerpos

- Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
- Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Tema 3: Proporcionalidad y funciones

- Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
- Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Tema 4: Nociones de probabilidad

- Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Tema 5: Análisis y representación de datos

- Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Bloque 1

Patrones y ecuaciones

Estudiarás en este tema

- Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Lee atentamente la siguiente historia:

En una colonia, se desea construir un parque, y para ello se destina un terreno cuadrado de 148 m de lado. Una parte cuadrada del terreno de 40 m por lado se ocupará como estacionamiento y el resto será el jardín. Calcula cuánto mide el lado del terreno sin considerar la longitud destinada para el estacionamiento. Ayúdate del esquema de la figura 1.1.

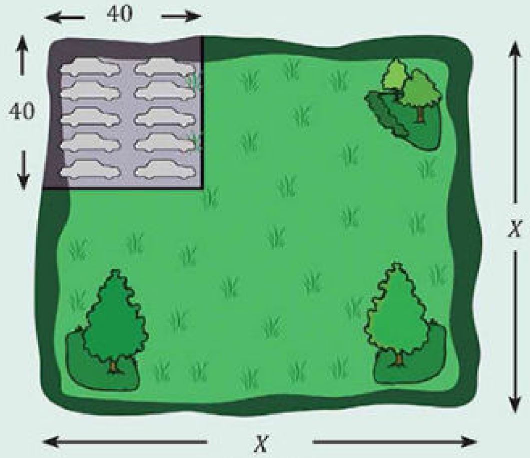


Figura 1.1

Plantea la ecuación que te servirá para encontrar esta longitud, luego reúnete con dos compañeros y comparen las ecuaciones planteadas, ¿son iguales?, ¿en qué difieren?

Elijan la ecuación que les ayudará a resolver la solución.

¿A qué resultado llegan? Elijan un representante de su grupo y comuníquenlo al resto de su clase. ¿Es igual el resultado obtenido por ustedes, al del resto de la clase? Justifica.

Y para comenzar...

1. ¿Estás de acuerdo tú en que esta es una ecuación?
2. ¿Qué es una ecuación? ¿Cómo se resuelve?
3. ¿Qué tipo de ecuaciones conoces? ¿Habrá ecuaciones de otros tipos?

Las ecuaciones que hasta ahora has estudiado son las que llamamos *lineales o de primer grado*, en las que el exponente de la incógnita que aparece en ellas es uno.

Para recordar un poco más acerca de resolver ecuaciones, realicen en grupos de tres integrantes los siguientes ejercicios, resolviéndolos individualmente y luego comparando y argumentando a favor o en contra de sus resultados y los resultados de sus compañeros de grupo. También, deben verificar si la solución obtenida es pertinente dentro del contexto del problema:

I. Resuelve los siguientes problemas:

1. Los ángulos interiores de un triángulo miden $2x$, $3x + 11°$ y $7x + 13°$. ¿Cuál es el valor de x que permite conocer la medida de cada ángulo?
2. En el año 2005 aún trabajaba como policía. Logré descubrir que el bribonzuelo apodado el "Irrenunciable" había enterrado a las afueras del poblado una caja que contenía cuatro paquetes iguales solo de anillos de diamantes. ¡Ah!, también había siete anillos similares, pero que estaban sueltos. Me acuerdo que en total eran 173: ¿Cuántos anillos tenía cada paquete?
3. Al triple del número de años de casados de una pareja de esposos le restamos 6 años y obtenemos el tiempo que les falta para celebrar sus Bodas de Oro matrimoniales (50 años) ¿Cuántos años de casados lleva esta pareja de esposos?
4. Al preguntársele a una persona por su edad, esta responde: "Si al doble de mi edad le quitas 8 años, obtendrás lo que me falta para cumplir los 100 años". ¿Qué edad tenía esta persona hace 17 años?

Como algunos ya habrán intuido, las ecuaciones lineales no son el único tipo de ecuaciones existentes. En esta sección podrás aprender a resolver otro tipo de ecuaciones, pero para ello es necesario que domines los contenidos ya aprendidos en grados anteriores sobre ecuaciones lineales.

Resolución de ecuaciones cuadráticas sencillas

El papá de Lupe está arreglando el piso de una habitación de su casa. Luego de hacer ciertas mediciones llegó a la conclusión de que necesita 30 baldosas cuadradas que cubran en total los 2.7 metros cuadrados de piso.

- ¿Cuánto debiera medir cada lado de las baldosas?
- ¿Se podrá plantear una ecuación que resuelva el problema del papá de Lupe?
- ¿Son estas ecuaciones parecidas a las que ya has estudiado? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?
- ¿Se podrán resolver como las ecuaciones que ya conoces?
- ¿Cuántos tipos distintos de ecuaciones, aparte de las que ya has estudiado, habrá? ¿Todas serán de fácil resolución?
- ¿Podrás resolver ecuaciones distintas a las ya vistas con los conocimientos que ya tienes?

Pensemos juntos el problema del papá de Lupe. ¡Anímate!, te darás cuenta de lo mucho que sabes y lo mucho que puedes aprender.

Dibujemos la situación, ya que un buen dibujo es una gran ayuda para resolver los problemas.

Cada baldosa debe ser como se muestra en la figura 1.2.

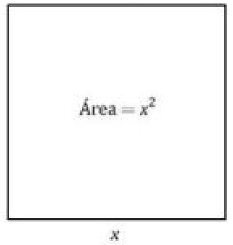


Figura 1.2

Como se requieren 30 baldosas, el área por cubrir será $30 \cdot x^2$. Ahora bien, como se necesita cubrir 2.7 metros cuadrados, podemos anotar que:

$$30 \cdot x^2 = 2.7$$

$$x^2 = \frac{2.7}{30}$$

(como debemos despejar la incógnita que aparece, dividamos por 30)

$$x^2 = 0.09$$

- ¿Puedes decir en palabras qué condición debe cumplir el número x?
- ¿Cómo podrías calcular este número? ¿Qué operación matemática debes realizar? Justifica.

Así, si aplicas la operación antes reconocida por ti, obtenemos que el lado de cada baldosa deberá medir 30 centímetros.

¿Qué ha ocurrido con las unidades de medida de este resultado?, ¿en qué unidades de medida se obtiene el resultado original?

¿Puedes afirmar que este resultado es correcto, confirmando la pertinencia de este, según el contexto del ejercicio? Explica.

Para transformar los metros a centímetros, debes multiplicar la cantidad de metros que quieres convertir por 100.
Puedes buscar más sobre el tema de transformación de unidades en el siguiente link. Recuperado, enero 3, 2013, de:
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Medidaslongitud.htm
También encontrarás un conversor de unidades en el siguiente link, recuperado, octubre 29, 2013 de:
http://www.metas.com.mx/utilerias/convertidormasa.php

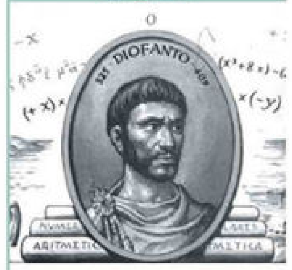
Nota además que si $x = -0.3$, también cumplirá con la condición de que al elevarla al cuadrado su resultado sea 0.09. Por lo tanto, estrictamente, las soluciones de la ecuación son dos: 0.3 y -0.3. Sin embargo, en el contexto de nuestro problema, la solución negativa no tiene sentido.

Como te habrás dado cuenta, estas ecuaciones son distintas a las que ya has estudiado, pues la incógnita está elevada a dos (al cuadrado). Estas ecuaciones se llaman, por esta razón, ecuaciones cuadráticas. Existen varios tipos de *ecuaciones cuadráticas* que iremos aprendiendo a resolver a través de este curso.

Las más simples son las del tipo $ax^2 + c = 0$, donde a y $c \in IR$ (son números reales), con $a \neq 0$. Estas son como la que acabamos de resolver ($30 \cdot x^2 = 2.7$, que se puede escribir como $30 \cdot x^2 - 2.7 = 0$). Si te das cuenta, la pudimos resolver solo con los conocimientos que ya tienes de años anteriores ¿Puedes hacer una lista con los pasos por seguir? ¿Cuántas soluciones tendrá una ecuación cuadrática?

Para realizar lo anterior reúnanse en grupos de cuatro integrantes y una vez que hayan realizado su lista, preséntenla al resto de la clase, justificando cada paso y mostrando mediante un ejemplo, el uso de cada uno de estos pasos en la resolución de una ecuación cuadrática.

Biografía



Diofanto de Alejandría nació alrededor del 200/214 n.e. y falleció entre el 284 y el 298 n.e. en Grecia. La ecuación de segundo grado fue desarrollada por este gran matemático que es considerado "el padre del álgebra".

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $2x^2 - 162 = 0$

SOLUCIÓN

Procedimiento:

$$2x^2 - 162 = 0$$
$$2x^2 = 162 \quad /:2$$
$$x^2 = 81 \quad /\sqrt{\ }$$
$$x = 9 \text{ o } x = -9$$

¿Por qué fue necesario extraer raíz al número 81 para obtener las soluciones de la ecuación?

¿Crees que ambas soluciones son admisibles, considerando que la ecuación no está inserta en un contexto determinado?

¿Se puede comprobar que el resultado obtenido sea el correcto? Por supuesto que sí. Para ello debemos reemplazar la incógnita, en la ecuación original, por los valores obtenidos y comprobar que ambos lados de la ecuación son efectivamente iguales.

En este caso, comprobemos primero para $x = 9$:

$2 \cdot (9)^2 - 162 = 0$

$2 \cdot 81 - 162 = 0$

$162 - 162 = 0$

$0 = 0$ *(por lo tanto, la igualdad se cumple, entonces 9 es solución de la ecuación)*

Para $x = -9$:

$2 \cdot (-9)^2 - 162 = 0$

$2 \cdot 81 - 162 = 0$

$162 - 162 = 0$

$0 = 0$ *(por lo tanto, la igualdad se cumple, entonces −9 es solución de la ecuación)*

Más que....

A las soluciones de una ecuación cuadrática se les llama también ***raíces de la ecuación.***

2. Juan ha decidido plantear a su hermana un acertijo. Él le hizo la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número natural que elevado al cuadrado da 676? La hermana de Juan respondió correctamente. Observa.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Para resolverlo, ella planteó la ecuación correspondiente.

$$x^2 = 676 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$x = 26 \quad \text{o} \quad x = -26$$

Nota que la pregunta hace alusión a un número natural, ¿Entonces el número -26 es solución en este caso? ¿Por qué?

Luego, ¿cuál (es) es (son) la (s) respuesta (s) en este caso?

Y para finalizar...

Retomando el problema inicial, determina ahora el lado del terreno a utilizar:

En una colonia, se desea construir un parque empleando para ello un terreno cuadrado y utilizando una superficie de 37 m de lado para el estacionamiento. Calcula cuánto mide el lado del terreno completo si el área de este terreno es de 22 500 m². ¿Cuánto medirá ahora el lado del terreno sin considerar la longitud destinada para el estacionamiento?

Con el resto de su clase elijan a tres compañeros, que deberán exponer sus resultados, la forma en que llegaron a ellos y evaluar la pertinencia de estos resultados.

Comprueba tus conocimientos Tema 1

I. Lee atentamente la información dada y coloca V (verdadero) o F (falso) en el segmento punteado, frente a la aseveración que está expresada en cada número.

1 Con respecto a la ecuación $ax^2 + c = 0$, con coeficientes reales, a distinto a cero, e incógnita x, se puede decir que:

a. ____ A veces no tienen solución.

b. ____ Las soluciones son distintas y de signos opuestos.

c. ____ Se puede reescribir como $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ con $a \neq 0$.

d. ____ Las soluciones son -1 y 1, si a y c tienen el mismo valor absoluto, pero son de signos distintos.

2 Justifica con tus palabras, o bien dando un ejemplo, cada una de tus respuestas anteriores.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Encuentra el(los) valor(es) de la incógnita en las siguientes ecuaciones. Además, comprueba que el resultado obtenido sea el correcto y luego, compáralo con otro compañero, defendiendo o corrigiendo tu resultado.

a. $x^2 - 169 = 0$

b. $2x^2 - 65 = 33$

c. $12.5 \cdot 2w^2 - 1 = 0$

d. $11w^2 - 621 = 9\,205 - 23w^2$

e. $\frac{y^5}{3y^7} = 192$

f. $\frac{50y}{7} = \frac{25}{0.1y}$

g. $1.3z^2 - (3^2 + 2^3) = 0.3z^2 - 4 + (40:5 + 15)$

h. $-z(z + 17) = (19z + 36)(1 - z)$ Expresa tu respuesta aproximando a la centésima.

i. $\frac{x^2 + 10}{5} - \frac{x^2 - 7}{3} = 1$

j. $\frac{x^2 - 9x + 13}{x^2 - 7x - 5} = \frac{9}{7}$

k. $(3y - 4)(2y - 3) = 40 + (y - 4)(y - 13)$

l. $12(3 - y)^2 = 3(12 - y)^2$

2 Cuáles son los divisores de y, sabiendo que $y^2 - 83 = 113$, con y positivo?

3 Si $x^2 - 121 = 0$, escribe los valores de la siguiente secuencia de números: $x - 5, x - 4, x - 3, x - 2, x - 1$.

4 a, b y c son tres naturales, tal que $a^2 - 289 = 0$, $2b^2 = \sqrt{64}$ y $c^2 - 8 \cdot 45 = 1$. Justificando tu respuesta, responde. ¿Será verdad que:

a. a y b son primos?

b. $c = b + a$?

5 El área de un triángulo es 720 cm², siendo la altura $5x$ y su base $2x$.

a. Escribe la ecuación de segundo grado que permite calcular el valor de x.

b. ¿Cuál es la medida de la altura?

c. ¿Cuánto es el valor de base?

6 Determina lo pedido en cada caso:

a. El área A de una circunferencia es 254.34 mm². Aproximando π a 3.14, encuentra el valor de su radio expresado en cm.

b. 1 089 dm² es la medida de la superficie de un cuadrado. ¿Cuál es la medida del perímetro de un rombo, cuyo lado es el doble del lado del mencionado cuadrado? Justifica tu respuesta.

7 Si multiplicamos un número natural n por su sucesor, obtenemos 2 162 ¿A qué natural nos estamos refiriendo?

8 Escribiendo algebraicamente: "un número entero x se le suma 9" se obtiene cierto binomio. Por otro lado, "al mismo número entero x se le resta 8" y se obtiene otro binomio. Ahora bien, si al multiplicar ambos binomios se obtiene el entero x al cual nos estamos refiriendo aumentado en 28. Responde:

a. Escribe la ecuación que representa esta situación, redúcela algebraicamente al máximo, pero no la resuelvas. ¿Obtuviste una ecuación de segundo grado? ¿Por qué?

b. Conforme a lo anterior, ¿será posible pensar que puedas obtener más de un entero que cumpla con las condiciones que están presentes en el enunciado de este ejercicio?

c. ¿Cuánto vale x?

d. De acuerdo a lo que has respondido en la pregunta anterior, ¿contradice lo que has contestado en **b.**?

9 Adivina buen adivinador. ¿Cuál es el número negativo que al elevarlo al cuadrado y restarle tres se obtiene exactamente setenta y ocho?

10 Responde lo siguiente:

a. Encuentra un número n, que cumpla la condición de que participe en la siguiente progresión:

sea $n^2+3, n^2+6, n^2+9, n^2+12, \ldots$

y además que, al sumar los siete primeros términos sea 336.

b. ¿En cuántas unidades difieren entre sí, los valores de n que debieras haber obtenido anteriormente?

c. Haciendo uso de los valores de n que conseguiste en **a.** anota la secuencia que se forma al remplazarlos en:

$(n-1)^2+3, (n-1)^2+6,$
$(n-1)^2+9, (n-1)^2+12, \ldots$

11 Determina el valor de la incógnita en cada uno de los siguientes casos:

a. El área del cuadrado de la figura 1.3 es 210.25 mm^2

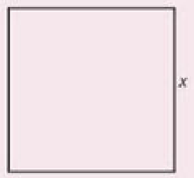


Figura 1.3

b. El área del triángulo rectángulo de la figura 1.4 es 90 cm^2

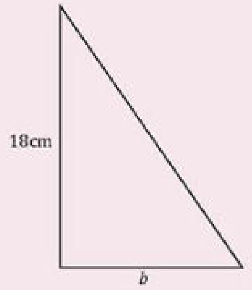


Figura 1.4

c. El área del rectángulo de la figura 1.5 es 144 cm^2

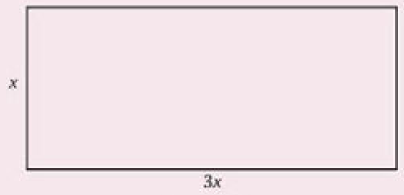


Figura 1.5

d. El área de la circunferencia de la figura 1.6 es 15.7 mm^2 (considera $\pi = 3.14$)

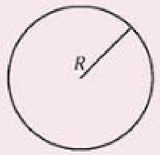


Figura 1.6

12 Al visitar la estancia de mi tío Antonio, él aprovechó de mostrarme el lugar donde van a construir un estanque para depositar los 96 000 l que provienen de la ciudad. Observé que allí, él había marcado en el terreno, una figura similar a un cuadrado... unos instantes después de nuestra llegada, exclamó –solo hay que cavar 6 m, siguiendo primeramente la figura que ves y su interior–. Entonces le reafirmé: –entiendo tío, se inicia por el contorno, ¿cuánto mide éste? Da tu respuesta a la pregunta del párrafo anterior.

13 El control de calidad de una fábrica de tornillos ha detectado que una de las partidas salió fallada. Vistos desde arriba, la figura de la izquierda presenta la cabeza de una pieza sin fallas mostrando los cortes simétricos. En cambio, la figura de la derecha muestra un tornillo fallado que destaca, en rojo, el único corte incorrecto.

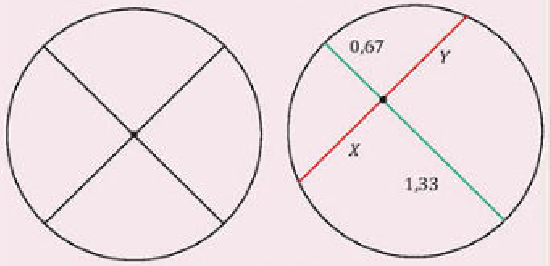


Figura 1.7

Si todas las medidas están en milímetros y $X = Y$, responde:

a. ¿Cuánto es el largo del corte fallado? Expresa tu respuesta con aproximación a la centésima.

b. Con la información dada hasta el momento, y sabiendo que el área total de la parte superior de la cabeza de la pieza sin fallas es π mm, ¿es posible afirmar que ambas circunferencias son congruentes? Justifica tu respuesta respaldándote de los cálculos pertinentes.

14 Hola amigo estudiante. Te presento mi sección: "Inventa ahorita tu propio problema" Te desafiamos a que, con tu grupo, inventen un problema que involucre ecuaciones cuadráticas como las tratadas en este tema y lo resuelvas. (Por ejemplo, observa el salón de tu clase, y busca alguna idea en donde aplicar lo que has aprendido en esta lección. Así, puedes determinar el área de su piso. Si ésta es rectangular, te puedes preguntar por ejemplo: ¿Cuánto mediría por lado este mismo salón si fuera cuadrado y se conservara el valor de la superficie de su piso?)

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Entendí el concepto de ecuación cuadrática			
Entendí los ejercicios resueltos en el libro.			
Desarrollé correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste en todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un mapa conceptual con los conceptos no adquiridos.

Figuras y cuerpos

Estudiarás en este tema

- Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
- Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Lee atentamente la siguiente historia:
A Miguel le han encargado como tarea para su clase de artes, que a partir de la observación de algunas fotografías de arquitectura, clasifique estas formas de acuerdo a algunas de sus características geométricas.

Y para comenzar...

Te invitamos también a ti a observar:

¿Qué formas geométricas puedes distinguir en estas construcciones? ¿Qué características tienen estas figuras geométricas?

Reúnete con dos compañeros y comparen lo observado, ¿qué similitudes y diferencias aprecian entre ambas observaciones? ¿En qué criterio(s) se basaron para clasificar las formas elegidas como figuras geométricas? Justifiquen.

¿Existe algún criterio que sea más válido que otro para la elección de estas figuras geométricas? ¿Por qué?

Para recordar un poco más acerca de las formas geométricas, reunidos en grupos de tres integrantes contesten las siguientes preguntas argumentando a favor o en contra de sus apreciaciones y las de sus compañeros:

1. ¿Cómo se clasifican los triángulos en función de sus lados y de sus ángulos?
2. ¿Qué elementos son los mínimos que se deben tener para poder construir un triángulo?
3. ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros?
4. ¿Qué diferencia existe entre un cuadrado y un rectángulo?

Luego de realizada esta actividad, organícense con el resto de la clase y en algunos grupos elijan un representante que dé la respuesta a una de estas preguntas, de modo de hacer una puesta en común en la que todos participen y argumenten a favor o en contra de sus respuestas y la de sus compañeros.

Para lograr un real aprendizaje de los nuevos contenidos presentados en este tema, es necesario que sepas muy bien lo aprendido en grados anteriores sobre figuras geométricas y sus características.

Congruencia de figuras geométricas

–Alberto, ¿has copiado la figura que hice? Eso no es justo, tú tenías que hacer la tuya propia.

–Pero Anita, si ha quedado muy bella. Mira (figura 1.8).

Figura 1.8

–Sí, pero se trataba de que cada uno hiciera algo distinto.

Mientras Alberto y Anita discutían, su maestra de Matemáticas llegó a la sala y al ver los dibujos se los pidió prestados por un momento para explicar algo de la clase de esa mañana. Ella les solicitó que observaran ambas imágenes y luego contestaran las preguntas que te hacemos a continuación...

- ¿Cuáles son sus diferencias? ¿Cuáles sus similitudes?

Si nos detenemos a revisar sus similitudes, te darás cuenta de que ambas tienen igual forma y tamaño, ¿verdad? Pues bien, a aquellas figuras de igual forma y tamaño se les llama ***Figuras congruentes***. En grados anteriores tú ya has estudiado algunas figuras congruentes. ¿Recuerdas las figuras simétricas? Observa, por ejemplo, este par de ellas en la figura 1.9.

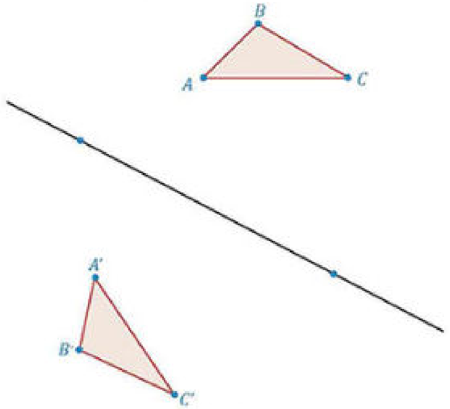


Figura 1.9

Si te das cuenta, ellas tienen la misma forma y el mismo tamaño. Una manera de comprobar esto es copiarlas en un papel, recortarlas y colocarlas una sobre la otra. Verás que coinciden exactamente.

Nota que si dos figuras tienen igual forma y tamaño, es decir, son congruentes, tendrán entonces todos sus lados correspondientes (lados homólogos) de igual medida entre sí y todos sus ángulos interiores homólogos de igual medida entre sí.

Supongamos ahora que se nos ha dado el triángulo de la figura 1.10.

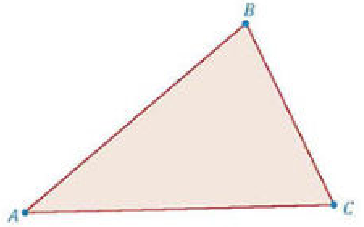


Figura 1.10

- ¿Cómo construirías otro triángulo congruente a él?

Muy bien... como lo has notado, es muy fácil. Solo tenemos que copiar los lados usando nuestro compás. Primero, sobre una recta cualquiera fijamos un punto A' (que será el homólogo de A); después con centro en A' y medida $\overline{AC}$, marcamos en la recta el punto C'. Así, en la figura 1.11 hemos copiado el lado $\overline{AC}$.

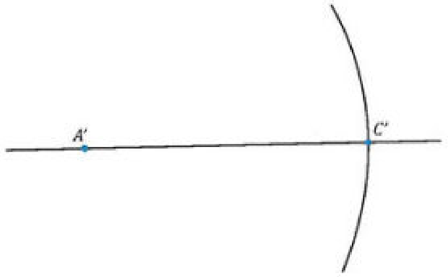


Figura 1.11

Luego, con el compás hacemos centro en A' y con medida $\overline{AB}$ marcamos un arco. Por último, con centro en C' y medida $\overline{CB}$, marcamos otro arco y buscamos que corte al anterior. Obtendremos así el vértice homólogo al vértice B. Observa que tendremos dos soluciones posibles, como muestra la figura 1.12.

Homólogos: correspondientes.

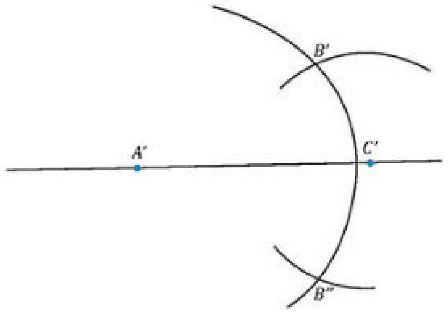


Figura 1.12

Tendremos entonces dos triángulos congruentes al dado: $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'B''C'$, como se observa en la figura 1.13.

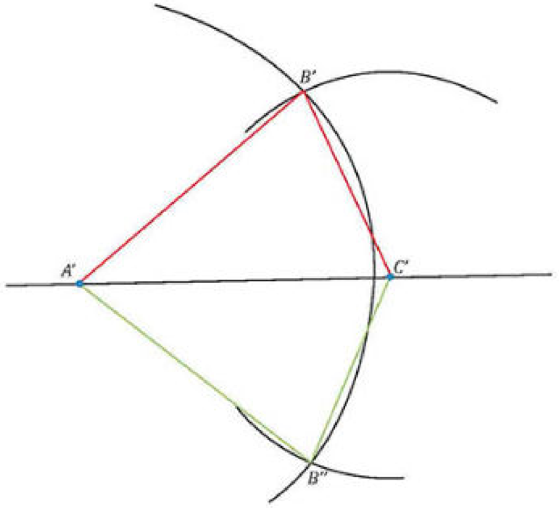


Figura 1.13

Supongamos ahora que nos dicen que debemos construir un triángulo congruente a otro que tiene dos lados que miden 6 y 8 cm y sabemos que el ángulo que forman entre ellos mide 70°.

Como lo que buscamos es un triángulo exactamente igual al que nos dan, basta con construir un triángulo con dichas características como lo has hecho en años anteriores. Copiamos uno de los lados, por ejemplo el de 6 cm, y sobre uno de sus extremos medimos el ángulo de 70° con el transportador, como se indica en la figura 1.14.

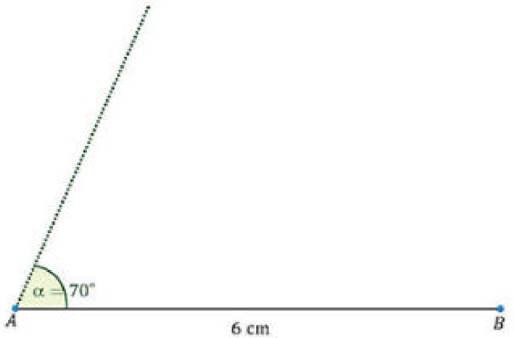


Figura 1.14

Ahora, con la medida de 8 cm en el compás, hacemos centro en *A* y marcamos en el trazo en verde (lado del ángulo) el tercer vértice del triángulo (figura 1.15).

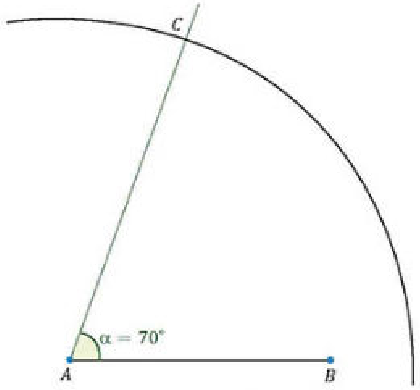


Figura 1.15

Por lo tanto, ya construimos el triángulo *ABC*, como se muestra en la figura 1.16.

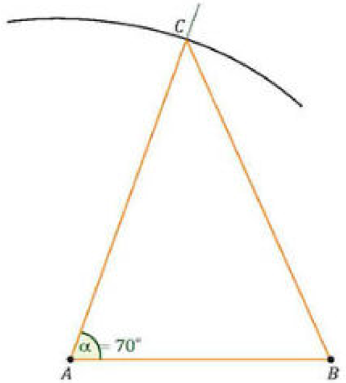


Figura 1.16

Muy bien, pensemos ahora qué condiciones deben cumplir dos triángulos que son congruentes. ¿Cómo son sus lados?, ¿cómo son sus ángulos?

Efectivamente, si dos triángulos son congruentes, tendrán todos sus lados homólogos de igual medida, así como también serán de igual medida sus ángulos homólogos.

Pero ¿cuáles serán las condiciones mínimas para determinar si dos triángulos son congruentes?, ¿tendrán relación con las condiciones mínimas que se necesitan para que un triángulo pueda construirse? Así es. A estas condiciones se les llama *Criterios de congruencia para triángulos.*

- Si se sabe que dos triángulos tienen sus tres lados homólogos congruentes, entonces los triángulos serán congruentes. Como ambos tienen iguales medidas, si hacemos coincidir uno con el otro, se superpondrán exactamente, por lo que tendrán igual forma y tamaño y entonces serán congruentes. Este criterio es conocido como LLL (lado-lado-lado) y se muestra en la figura 1.17.

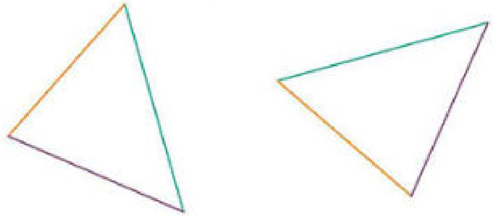


Figura 1.17

- Si se sabe que dos triángulos tienen dos de sus lados homólogos congruentes y el ángulo formado por ellos de igual medida, entonces los triángulos serán congruentes. Si hacemos coincidir los lados iguales y el ángulo igual, tendremos dos figuras exactamente iguales, como se observa en la figura 1.18. Este criterio se conoce con el nombre de LAL (lado-ángulo-lado).

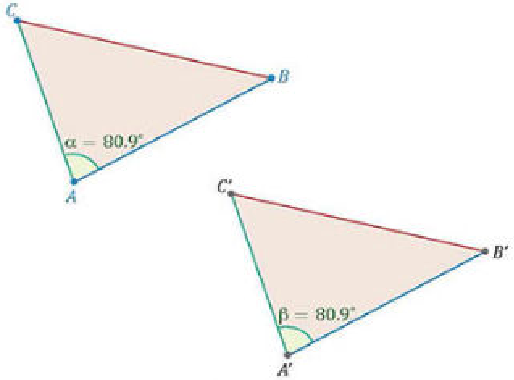


Figura 1.18

- Si se sabe que dos triángulos tienen un lado homólogo igual y los ángulos sobre ese lado de similar medida, entonces los triángulos serán congruentes. De la misma manera que en los casos anteriores, podemos superponer ambos triángulos y notaremos que tienen igual forma y tamaño. Este criterio se conoce como ALA (ángulo-lado-ángulo), figura 1.19.

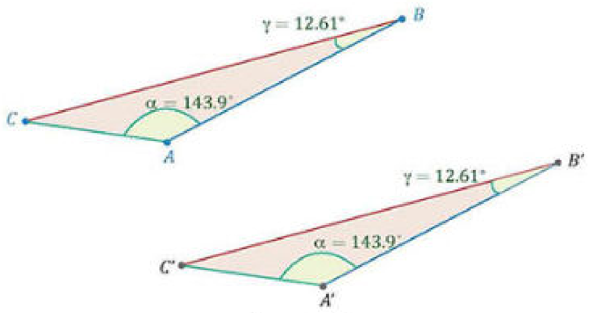


Figura 1.19

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los triángulos de la figura 1.20, determina si son congruentes o no según los datos dados y aplicando los criterios de congruencia para triángulos estudiados.

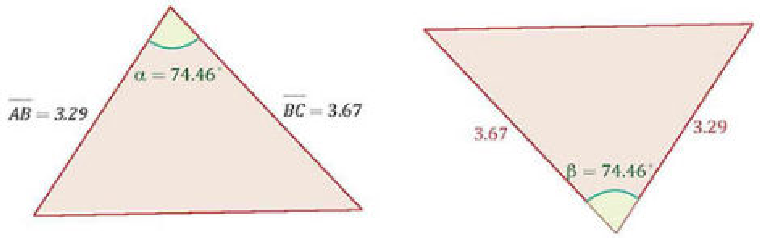


Figura 1.20

SOLUCIÓN

Procedimiento: Como tienen dos lados iguales y el ángulo formado por ellos es congruente, entonces se aplica el criterio LAL, por lo que podemos decir que estos triángulos son congruentes.

2. Se sabe que los triángulos *ABC* y *DEF* de la figura 1.21 son congruentes. ¿Cuál es la medida del trazo *AB* y la del ángulo en *F*?

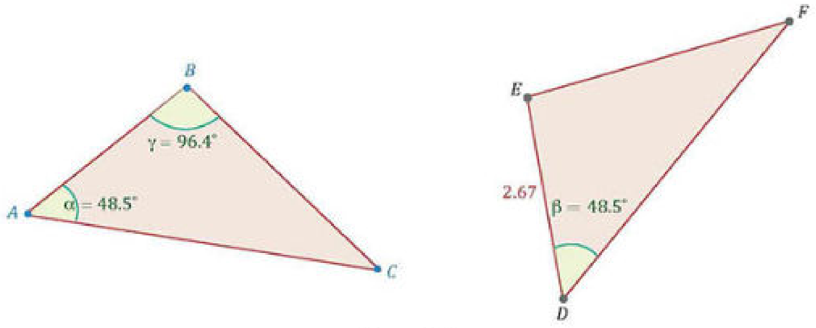


Figura 1.21

SOLUCIÓN

Procedimiento: Nota que al nombrar los triángulos congruentes siempre se hace en orden según sus lados homólogos, por lo tanto, en este caso el lado $\overline{AB}$ es homólogo con el lado $\overline{DE}$ y, en consecuencia, tienen igual medida. Así, el trazo $\overline{AB} = 2.67$.

Por otro lado, el ángulo en *C* es homólogo con el ángulo en *F*. En el triángulo *ABC*, el ángulo en *C* mide 35.1° (los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°), por lo tanto, su homólogo, ángulo *DFE*, medirá también 35.1°.

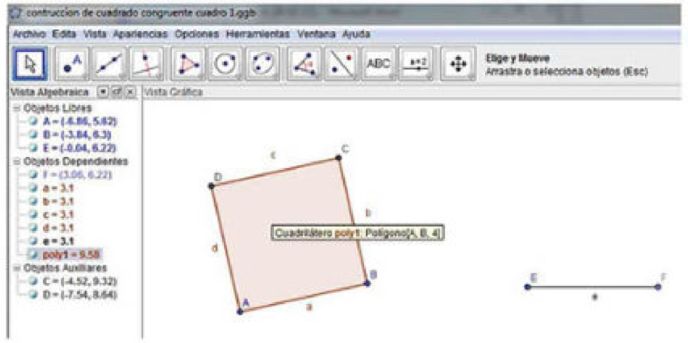
Las teselaciones son también una aplicación de figuras congruentes. Si quieres saber más, puedes buscar en las siguientes páginas. Recuperadas, enero 6, 2013, de:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html
http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm
En el siguiente link encontrarás también un relato sobre algunas aplicaciones en la vida diaria, recuperado, octubre 29, 2013, de:
http://www.comunicacion.amc.edu.mx/comunicados/teselaciones-arte-y-matematicas/

Existen algunos programas computacionales que nos ayudan a trabajar más fácilmente con construcciones. Uno de ellos es Geogebra y lo utilizaremos en esta parte para estudiar la congruencia de cuadrados y rectángulos.

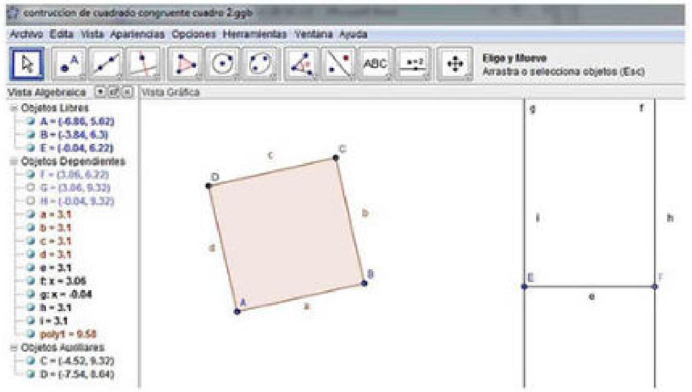
Este programa se puede bajar gratuitamente, por ejemplo, en el siguiente link: *http://geogebra.softonic.com/descargar*
Recuperado, enero 5, 2013.

Como ya hemos dicho, si dos cuadrados son congruentes, entonces tendrán todos sus lados homólogos de la misma medida y todos sus ángulos rectos. ¿Cómo construiremos un cuadrado congruente al cuadrado *ABCD*?

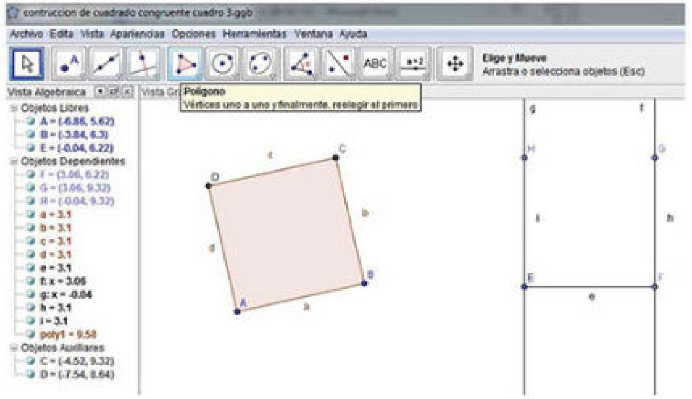
Si miras la figura, podemos trazar un segmento *EF* con la medida del lado del cuadrado (3[er] ícono de izquierda a derecha).



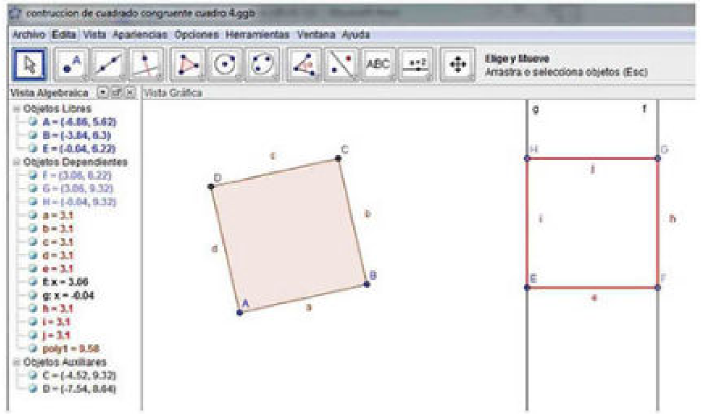
Trazaremos una perpendicular (4° ícono de izquierda a derecha) al trazo *EF* por *F* y otra por *E*.



Ahora, trazamos un segmento de igual medida al lado del cuadrado, primero desde el vértice *F* y luego desde el vértice *E*. Este va a quedar situado a la derecha de *F*. Para llevarlo sobre la recta *f*, haz clic en la flecha (1[er] ícono) y mueve el extremo del trazo hasta colocarlo sobre la recta *f*.

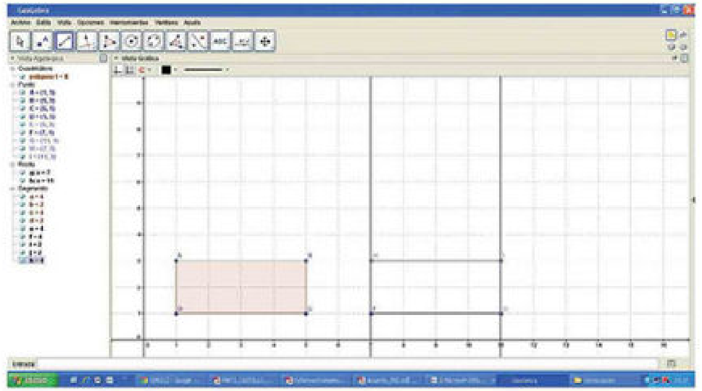


Por último, une los vértices y tendrás el cuadrado congruente pedido.



En este caso, como ya lo estudiamos, al ser ambos cuadrados congruentes, sus lados tienen la misma medida, y al superponer uno encima de otro, coincidirán en sus medidas y ángulos. Verifícalo, midiendo, dibujando y recortando ambos cuadrados.

Para construir un rectángulo debes seguir los pasos ya señalados anteriormente para la construcción de tu cuadrado, es decir, a partir de un rectángulo dado obtendrás:



Así, nuevamente, ya que estos rectángulos son congruentes tienen sus lados homólogos de igual medida y todos sus ángulos rectos.

Semejanza de figuras geométricas

La profesora de Alberto y Anita les mostró ahora la figura 1.22 y les hizo las mismas preguntas que en el caso de las rosas: ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de las imágenes?, ¿pueden establecerlas? Obsérvenlas un momento.

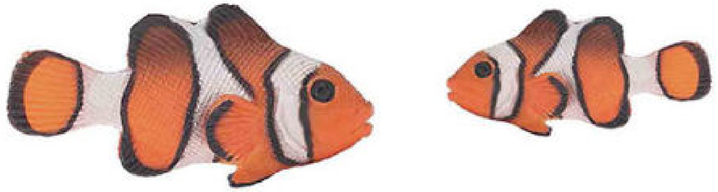


Figura 1.22

Como ya te has fijado muy bien, estas figuras tienen igual forma, pero distinto tamaño.

- Mide el ancho de las colas de cada dibujo y calcula la razón entre estas medidas. Compara este valor con cuatro compañeros de clase.
- Realiza el mismo procedimiento midiendo el largo de ambos dibujos.
- A partir de los resultados obtenidos, ¿qué puedes concluir? Elijan, a tres de sus compañeros de clase, para que comuniquen y defiendan los resultados obtenidos, así como el procedimiento utilizado para obtenerlo.

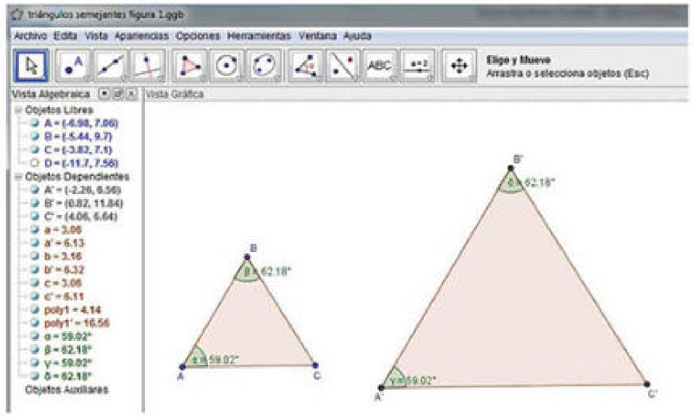
Como te habrás dado cuenta, todas las razones que has escrito tienen el mismo valor. Es decir, no solo son de distinto tamaño, sino que sus medidas cumplen con la condición de estar en una misma razón.

En matemáticas decimos que las figuras que tienen todas sus medidas lineales en la misma razón se llaman *figuras semejantes*.

Sabías que...

Las ampliaciones o reducciones que hace una máquina fotocopiadora son un ejemplo claro de obtención de figuras semejantes.

Analicemos con ayuda del programa Geogebra cuándo dos triángulos son semejantes y cómo se construyen. En la imagen se han construido dos triángulos isósceles en que las medidas de uno de ellos son el doble de las medidas del otro. Así, al tener sus lados correspondientes en razón 2 : 1, serán semejantes. Observa.



Si te fijas y mides sus ángulos interiores, te darás cuenta de que los ángulos homólogos de ambas figuras son de igual medida. Ahora sí podemos establecer la definición matemática de dos triángulos semejantes. Entonces, podemos decir que dos triángulos son semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos interiores homólogos de igual medida.

Pues bien, ahora construiremos un triángulo semejante al de la figura 1.23 de razón de semejanza $\frac{3}{1}$ (Recuerda que la razón de semejanza es la razón entre las medidas del triángulo dado y las del triángulo semejante buscado). Escribiremos una proporción para calcular la medida de los lados (a, b, c) del nuevo triángulo.

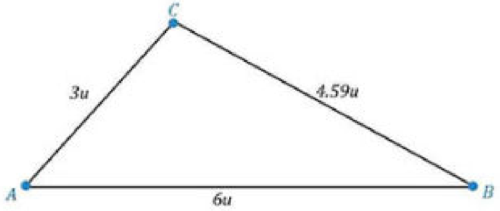


Figura 1.23

Más que...

Podemos extender la definición de triángulos semejantes para cualquier polígono. Así, dos polígonos serán semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos interiores homólogos de igual medida.

Para el lado homólogo a $\overline{AB}$, tendremos que: $\frac{6}{a}=\frac{3}{1} \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$

Para el lado homólogo a $\overline{AC}$, tendremos que: $\frac{3}{b}=\frac{3}{1} \Rightarrow 3b=3 \Rightarrow b=1$

Para el lado homólogo a $\overline{BC}$, tendremos que: $\frac{4.59}{c}=\frac{3}{1} \Rightarrow 3c=4.59 \Rightarrow c=1.53$

Por lo tanto, debemos construir un triángulo con las medidas que acabamos de calcular, como se muestra en la figura 1.24.

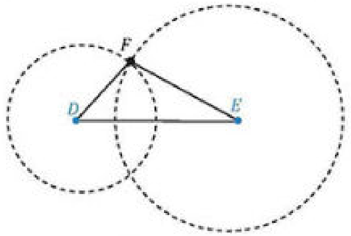


Figura 1.24

Así, el triángulo *DEF* es semejante al triángulo dado. Observa que esto se anota de la siguiente manera:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (nota que debemos nombrarlos ordenadamente según sus vértices homólogos). De esta semejanza, entonces, podemos establecer las siguientes proporciones:

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$

Supongamos ahora que debemos construir un triángulo semejante al de la figura 1.25 si sabemos que el lado homólogo del lado $\overline{AB}$ $(\overline{A'B'})$ debe medir 4 unidades.

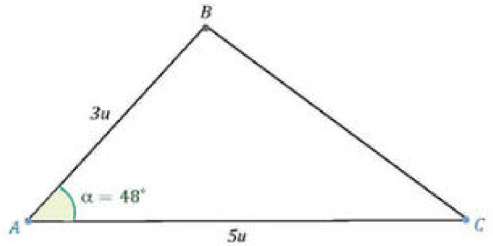


Figura 1.25

Calculemos entonces la medida del lado homólogo de $\overline{AC}$ $(\overline{A'C'})$.
Para esto podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{x} \quad \Rightarrow \quad 3x = 20 \Rightarrow \quad x = \frac{20}{3}$$

Ahora podemos construir el triángulo semejante buscado, ya que tenemos la medida de dos de sus lados: 4 y $\frac{20}{3}$ y la medida del ángulo que estos forman: 48° (recuerda que los ángulos homólogos son de igual medida).

Primero construimos un lado de $\frac{20}{3}$ u. Luego, sobre el extremo izquierdo, un ángulo de 48°, por último, con el compás y medida 4 u hacemos centro en el vértice izquierdo del trazo inicial y marcamos en el otro lado del ángulo el tercer vértice del triángulo buscado, figura 1.26.

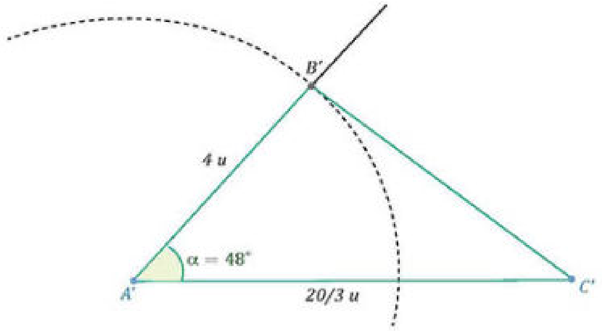


Figura 1.26

- ¿Habrá criterios de semejanza para triángulos así como existen en los de congruencia?

Efectivamente, existen y son muy similares a los estudiados para la congruencia.

- Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres pares de lados homólogos proporcionales (en la misma razón). Si te fijas en el primer ejemplo, sus ángulos serán necesariamente iguales. Este criterio se conoce con el nombre de LLL (lado-lado-lado), figura 1.27

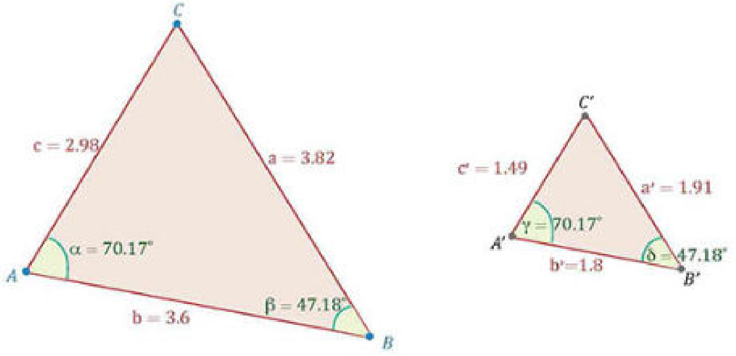


Figura 1.27

Más que...

Dos figuras congruentes también pueden mirarse como si fueran semejantes de razón de semejanza igual a 1.

Lados proporcionales y ángulos iguales, por lo tanto los triángulos son semejantes (igual forma, tamaño proporcional).

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos interiores homólogos de igual medida. Mira la figura del criterio anterior. Ángulos homólogos iguales (basta con dos de ellos, pues si los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°, entonces el tercer ángulo necesariamente será igual) determinan lados proporcionales. Este criterio se conoce como AA (ángulo-ángulo).

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos de igual medida. Al dibujar dos triángulos con estas condiciones, como se muestra en la figura 1.28, notarás que al medir el tercer lado de cada triángulo, estos estarán en la misma razón que los otros lados. Este criterio es conocido como LAL (lado-ángulo-lado).

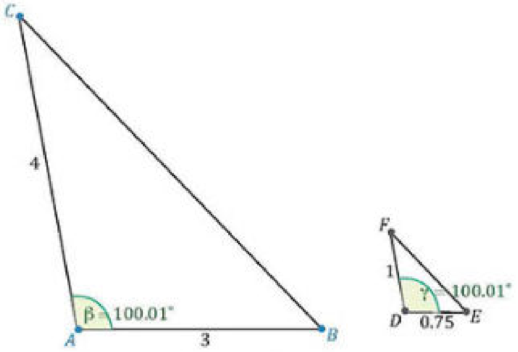
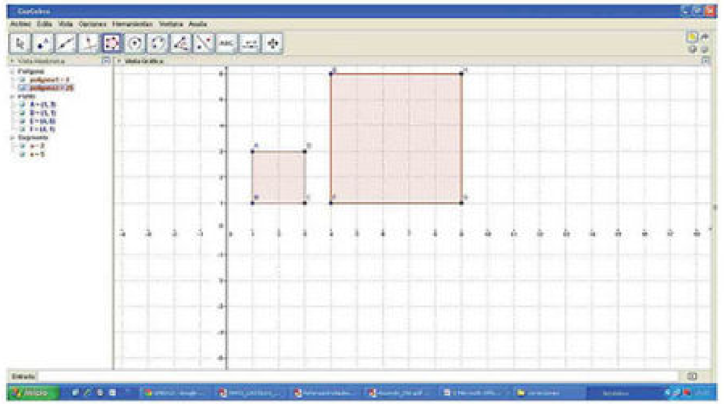


Figura 1.28

Recuerda y registra...

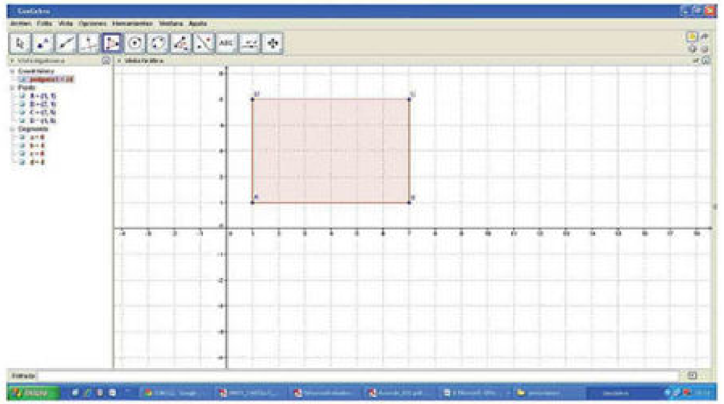
Los conceptos de congruencia y semejanza se establecen cuando las figuras tienen la misma forma e igual o diferente tamaño. Para la congruencia, tanto ángulos y lados tienen la misma medida. Mientras que en la semejanza las dos figuras tienen la misma forma pero distinta medida.

Examinaremos ahora las propiedades de dos cuadrados semejantes. En primer lugar nos ayudaremos de un programa de dibujo geométrico por computadora para construirlos. En la imagen se han construido dos cuadrados semejantes de razón 1:2.5.



Si te fijas, los ángulos de ambos cuadrados siempre serán de 90°, es decir sus ángulos tendrán la misma medida. Ahora bien, la medida de los lados de ambos cuadrados son proporcionales, conservando siempre la misma razón entre cualquier par de lados de ambos.

De la misma manera, ocurrirá con un par de rectángulos. Inicialmente construiremos un rectángulo cuyos lados miden 4 y 6 cm.



Ahora, sabiendo que la razón de semejanza es 5:2, determina la medida de los lados del nuevo rectángulo y constrúyelo. Para ello, debes seguir los pasos previos en el software, pero antes debes calcular la medida de los lados.

Para esto, ¿qué procedimiento matemático ocuparás? Justifica y calcula estas medidas.

Luego, con el resto de la clase, discutan sus resultados y el procedimiento que utilizaron para obtenerlos, refutando o validando sus resultados.

Y para finalizar...

Para finalizar, en grupos de no más de cuatro integrantes, analicen una situación cotidiana en la que esté presente la congruencia o la semejanza de figuras, justificando según el o los criterios que se cumplen en ella. Elijan un representante de su grupo para que comunique y argumente a favor de sus conclusiones ante resto de la clase.

Comprueba tus conocimientos Tema 2

Para ejercitar los contenidos estudiados en este tema, resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta:

I. Lee atentamente la información dada y completa según corresponda.

1 Dos figuras geométricas son congruentes si tienen ______________________.

2 Dos triángulos que son congruentes tienen sus ángulos ______________________.

3 ______________________ es la razón entre las medidas del triángulo dado y las del triángulo semejante buscado.

4 El criterio de semejanza de triángulos llamado LAL (lado - ángulo - lado) dice: ______________________.

5 Dos figuras congruentes también pueden considerarse figuras semejantes cuyo valor de la razón de semejanza es igual a ______.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Los lados de un triángulo miden 20, 48 y 52 cm. El lado menor de otro triángulo semejante al primero mide 56 cm.

a. ¿Cuál es la razón de semejanza?

b. ¿Cuánto es el largo de los otros lados?

2 Al romboide de la figura adjunta se le ha trazado una de sus diagonales.

a. ¿Son congruentes los triángulos que se forman? ¿Por qué?

b. Indica una manera de nombrarlos para destacar su congruencia.

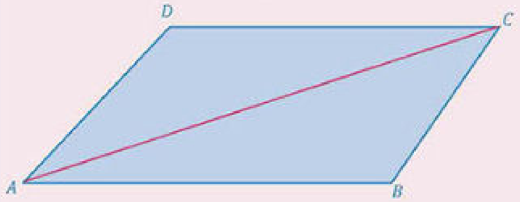


Figura 1.29

3 Determina el valor de la incógnita de tal manera que el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ de la figura 1.30 sean congruentes y además cumplan con lo señalado en cada letra del ejercicio:

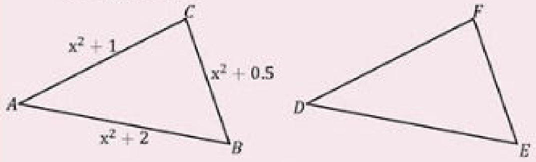


Figura 1.30

a. $\overline{FD} = 145$ mm

b. $\overline{EF} = -x^2 + 800.5$ mm

c. Con el valor obtenido en **a.** escribe el valor de cada lado de $\triangle DEF$.

d. Usando la respuesta en **b.**, calcula el perímetro de cualquiera de los triángulos.

4 Dos triángulos tienen en común, dos ángulos que miden 23° y 33°. Si en uno de ellos, estos ángulos están ubicados en los extremos de un lado de 4.8 cm:

a. Escoge un valor mayor para el lado homólogo al lado dado e indica el valor de la razón de semejanza que así se define.

b. ¿Qué criterio de semejanza está aludido en este ejercicio?

5 Dibuja dos triángulos, $\triangle MNP$ y $\triangle RST$, de tal modo que sean semejantes:

a. Establece tres proporciones entre sus lados.

b. Indica los ángulos homólogos.

6 Se dispone de un rectángulo $ABCD$ tal que $\overline{AB} = 5$cm y $\overline{BC} = 7$cm el cual debes dibujar previamente usando tu juego de geometría:

a. Construye un rectángulo $AEFG$ semejante a él, sabiendo que la razón de semejanza es $5:7$ y $\overline{AE}$ debe contener a B.

b. Indica los pasos a seguir en esta construcción.

c. ¿Cuántas rectángulos semejantes al original es posible construir dadas la condiciones expresadas en a.?

d. Mide las diagonales de ambos rectángulos. Encuentra el valor de la razón entre la diagonal del rectángulo original respecto a la del rectángulo semejante a éste. ¿Con qué valor debiera coincidir? ¡Verifícalo!

7 En la siguiente tabla están presentes el $\triangle$ *MNP*, y otros dos. Uno de ellos es congruente y el otro semejante al $\triangle$ *MNP*. Si todas las medidas se han efectuado en metros:

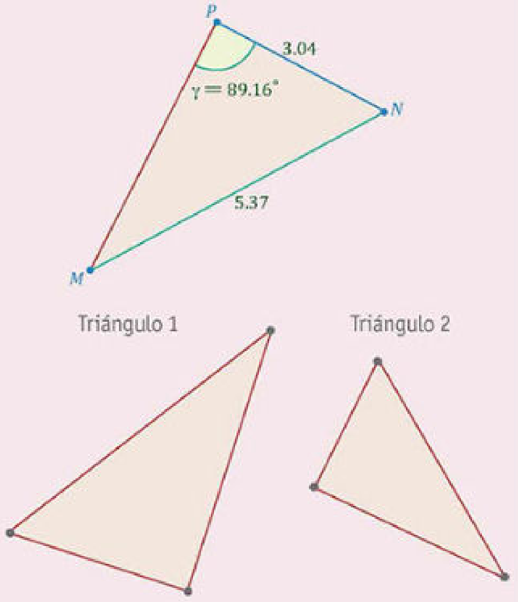


Figura 1.31

a. ¿Cuál de ellos es el congruente al $\triangle$ *MNP*? Llámalo $\triangle$ *ABC*.

b. ¿Qué criterio de congruencia se ha usado para hacer la afirmación anterior?

c. Copia cada medida del triángulo original en el congruente según corresponda.

Por otro lado, el triángulo semejante se llama $\triangle$ *FGH*, y se sabe qué el lado homólogo a *NP* mide 2.584 m.

d. Encuentra los otros valores posibles de hallar y colócalos en el triángulo correspondiente, indicando previamente la razón de semejanza.

e. Si supiéramos el valor del perímetro del triángulo semejante, ¿es posible conocer la medida de $\overline{PM}$? Justifica tu respuesta.

8 La figura 1.32 muestra el $\triangle$ *A'B'C'* cuyo perímetro es 54 cm.

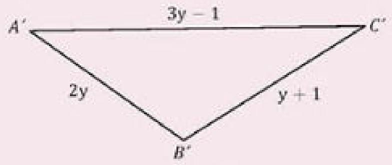


Figura 1.32

a. ¿Cuáles son las medidas del $\triangle$ *A'B'C'*?

Además, halla el valor de los lados de otro triángulo, llamado $\triangle$ *D'E'F'*, tal que sea semejante a $\triangle$ *A'B'C'* y cuya razón de semejanza sea:

b. $\frac{1}{3}$

c. 9:7. Expresa tu respuesta con aproximación a la décima.

d. Con el valor obtenido en a., establece la razón entre los perímetros ¿coincide con el valor de semejanza $\frac{1}{3}$? Justifica tu respuesta.

e. Indica las medidas de los lados de un triángulo semejante $\triangle$ *A'B'C'* y la razón respectiva, sabiendo que el lado mayor mide 39 cm.

9 El $\triangle$ *MNP* ~ $\triangle$ *RST* tiene razón de semejanza $\frac{2}{5}$, y $\triangle$ *RST* ~ $\triangle$ *FGH* tiene razón de semejanza $\frac{5}{7}$. Si las medidas del triángulo $\triangle$ *RST* son 12.5 dm, 30 dm y 32.5 dm:

a. Encuentra la medida de los lados de los otros triángulos.

b. Comprueba que $\triangle$ *MNP* ~ $\triangle$ *FGH* verificando que la razón de semejanza es $\frac{2}{7}$.

10 En las situaciones de la figura 1.33 determina una o más parejas de triángulos semejantes y el criterio que justifica la semejanza.

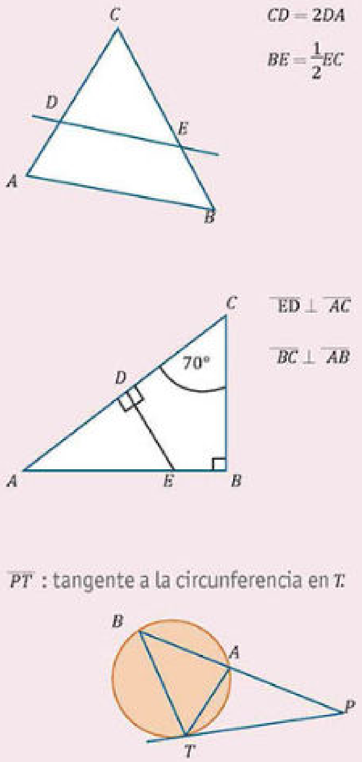


Figura 1.33

11 Valerio y Asunción son dos detectives que están mirando el bosquejo de la figura 1.34 del sitio donde un grupo de jóvenes desapareció sin aún grandes explicaciones.

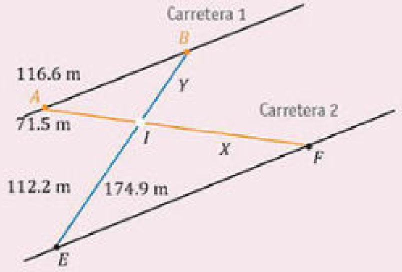


Figura 1.34

"¡Ah! Estas son las dos carreteras paralelas que se unen entre sí por los puentes", indica Asunción. "Además que estos puentes se intersecan, pero no tenemos toda la información de distancias", agrega Valerio.

Conforme al relato, responde:

a. ¿Cuál es la medida de X e Y?

b. Los detectives sospechan que esta desaparición ocurrió en el puente más largo. ¿Cuál es la longitud de este?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/−	−
Puedo explicar cuándo dos figuras geométricas son congruentes			
Puedo explicar los criterios de congruencia de triángulos			
Sé explicar cuándo dos figuras geométricas son semejantes			
Puedo explicar los criterios de semejanza de triángulos			
Puedo explicar la diferencia entre congruencia y semejanza			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección			
Pude resolver correctamente los ejercicios propuestos en esta sección			

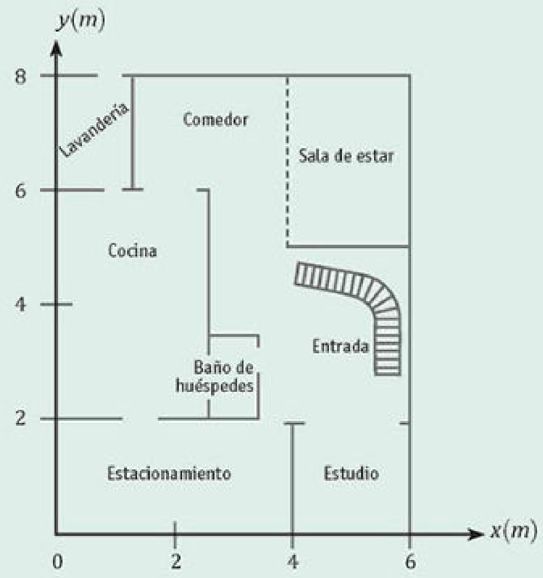
Si obtuviste solo indicadores (+), ¡Felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un esquema con el listado de los conceptos que no fueron aprendidos con su definición.

Proporcionalidad y funciones

Estudiarás en este tema

- Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
- Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Observa el siguiente plano del primer piso de una casa:



Y para comenzar...

De acuerdo al plano dado y considerando los ejes x e y del plano cartesiano como se muestran, responde individualmente:

1. ¿Se puede afirmar que el estudio mide 2×2 m?
2. ¿A partir de qué punto en el eje y comienza la lavandería?
3. ¿En qué punto del plano se ubica el vértice derecho y superior del estacionamiento?
4. ¿Cuáles son las medidas aproximadas del largo y del ancho de la cocina?

Luego, reúnete con tres compañeros más y comparen sus resultados, argumenten a favor o en contra de sus resultados y los de sus compañeros. Discutan, ¿creen que es necesario determinar un sistema de coordenadas para expresar la ubicación de algunos elementos del plano? Justifiquen.

Si no puedes responder algunas de estas preguntas, debes repasar y entender muy bien estos temas para el buen desarrollo y comprensión de los nuevos contenidos que te presentamos a continuación.

Plano cartesiano

Un plano cartesiano contiene un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas perpendiculares. Ellas se intersectan en el cero. Los números positivos del eje x van hacia la derecha y los del eje y, hacia arriba y los números negativos del eje x van hacia la izquierda y los del eje y, hacia abajo. Como en la figura 1.35:

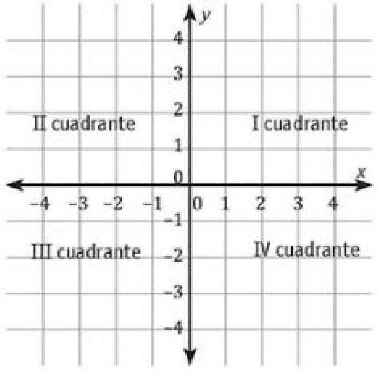


Figura 1.35

Si te fijas, el plano queda dividido en 4 partes llamadas *cuadrantes*, los que se nombran con números romanos y en sentido contrario a la marcha de los punteros del reloj. Se comienza por aquel cuadrante que queda por encima del eje horizontal y a la derecha del eje vertical. Los ejes coordenados se llaman *eje de las abscisas* (x) y eje de las ordenadas (y). Ellos no pertenecen a ningún cuadrante.

Como el plano está formado por puntos, la idea es poder determinar la ubicación de un punto en él con precisión. Para esto, nombraremos un punto del plano según su posición con respecto al origen por las dos coordenadas que lo forman: la primera será la de las abscisas (x) y la segunda la de las ordenadas (y). Así, cada punto estará definido por el par ordenado (x,y).

Mira el ejemplo de la figura 1.36 y los puntos del plano que dibujamos en él:

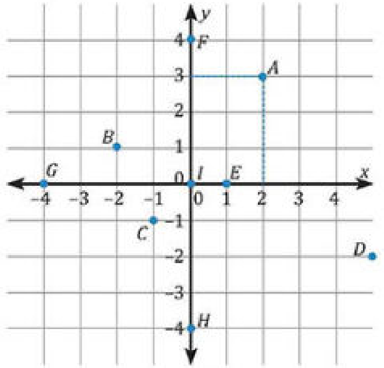


Figura 1.36

El punto *A* tiene coordenadas (2,3). Para ubicarlo en el plano solo debes colocar el lápiz en el número 2 en el eje *x* y luego subir hasta el número 3 en forma paralela al eje *y*.

Así, las coordenadas del resto de los puntos son *B*:(−2, 1), *C*:(−1, −1), *D*: (5, −2), *E*: (1, 0), *F*:(0, 4), *G*:(−4, 0), *H*:(0, −4) e *I*:(0, 0); este último se llama ***origen del plano cartesiano***.

Podemos generalizar algunas ideas aquí con respecto a los puntos y a los cuadrantes:

- Todo punto en el I cuadrante tiene ambas coordenadas positivas.
- Todo punto en el II cuadrante tiene la abscisa (coordenada de las *x*) negativa y la ordenada (coordenada de la *y*) positiva.
- Todo punto en el III cuadrante tiene ambas coordenadas negativas.
- Todo punto en el IV cuadrante tiene la abscisa positiva y la ordenada negativa.
- Todo punto que está en el eje de las abscisas tiene ordenada cero.
- Todo punto que está en el eje de las ordenadas tiene abscisa cero.

Habilidades por desarrollar: caracterizar – determinar.

1 Ubicar en un plano cartesiano los puntos

A: (1, 3); *B*: (−2, 5); *C*: (3, −2); *D*: (−3, −1); *E*: (−1, 0); *F*: (0, −3)

2 Dados los puntos del plano de la figura 1.37, determina las coordenadas de cada uno.

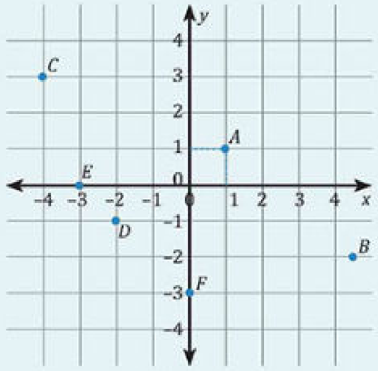


Figura 1.37

Si quieres saber más sobre este tema, puedes buscar en el siguiente link, recuperado, octubre 29, 2013, de: *http://dcb.fi-c.unam.mx/cerafin/bancorec/capsulasmatematicas/simetria.pdf*

Representaciones de una relación entre dos variables

A Francisco le gustaba mucho revisar la página del banco de México. En ella podía enterarse de la economía de su país. Algunas veces miraba los gráficos. Para él era más fácil comparar al momento de hacer un análisis.

Hoy se detuvo a analizar el gráfico de la figura 1.38, que muestra información sobre el precio del dólar basada en el cambio con nuestra moneda nacional.

Figura 1.38

Los gráficos nos ayudan a obtener de manera más sencilla información de las variables involucradas. Por ejemplo, en este caso, si las variables son el precio del dólar, en función del número de pesos mexicanos a los que equivale.

Estudiemos con más detalles algunas relaciones matemáticas importantes. Lo primero que debemos decir y recordar es que dadas dos variables que se relacionan entre sí, existe una que se llama ***variable independiente*** (varía por sí sola, generalmente llamada *x*) y otra que es la variable dependiente (varía según lo hace la variable independiente, generalmente llamada *y*). Una relación entre estas dos variables (dependiente e independiente) se puede representar de tres maneras distintas: algebraicamente, tabularmente y gráficamente.

Analicemos la siguiente situación: "María, que tiene una tortería, le da a José 2 pesos por cada torta de jamón que él venda en su oficina". Podemos acá establecer una relación entre el dinero que recibe José y el número de tortas que venda. Si llamamos *x* (variable independiente) al número de tortas e *y* (variable dependiente) al dinero recibido, podemos anotar que: $y = 2x$. A esta forma de anotar la relación la llamaremos ***Forma algebraica***.

También podemos confeccionar una tabla que represente la situación para varios casos:

x (Número de tortas vendidas)	y (Dinero recibido en pesos)
1	2
2	4
3	6
4	8

A esta forma la llamaremos *Forma tabular.*

Por último, podemos representar la información mediante un gráfico, valiéndonos del plano cartesiano. Ubicamos los valores de la variable independiente en el eje horizontal (x) y la variable dependiente en el eje vertical (y). Luego ubicamos los puntos de la tabla anterior, como se muestra en la figura 1.39:

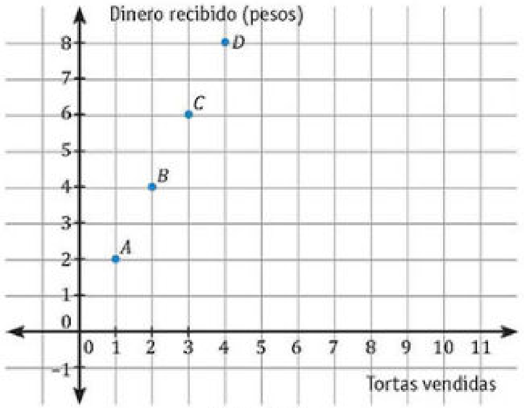


Figura 1.39

A esta manera de representar una relación se la llamará *Forma gráfica.*

Nota que este gráfico solo se representará a través de puntos debido a que no se venden 1.5 tortas, por ejemplo. Sin embargo, si uniéramos los puntos para tener una gráfica, la línea obtenida sería una recta que pasa por el origen. Esta variación es directamente proporcional, y corresponde a una línea recta que pasa siempre por el origen.

Representemos ahora tabular y gráficamente (figuras 1.40 y 1.41) las siguientes relaciones:

1. $y = 4x - 5$

x	y
–2	–13
–1	–9
0	–5
1	–1
2	3

Figura 1.40

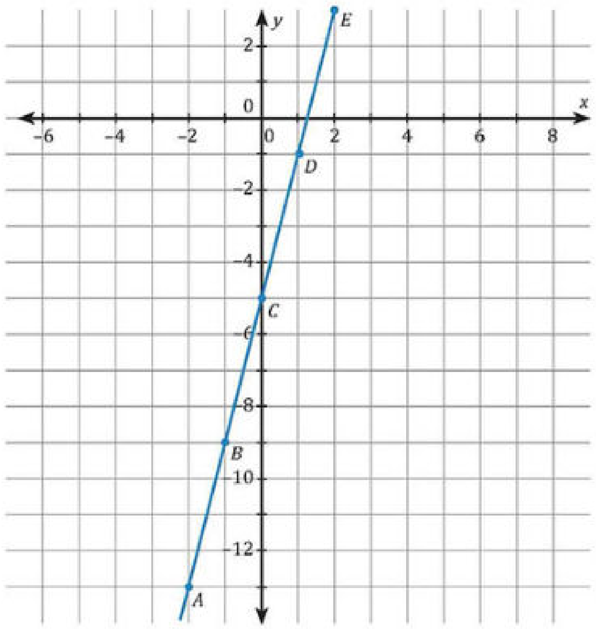


Figura 1.41

Observa que este gráfico tiene una forma similar al gráfico de la figura 1.39, pero esta no pasa por el origen del sistema cartesiano, como sí pasaría la del caso anterior si uniéramos los puntos. Hablamos acá entonces de una variación de tipo lineal.

Recuerda y registra...

La variación directamente proporcional es un caso particular de las variaciones lineales, puesto que para una variación lineal, su representación es una recta que no pasa por el origen, lo que sí ocurre con una variación directamente proporcional.

2. $y = \frac{3}{x}$, donde x solo puede tomar valores positivos. (Nota que para el valor 0 no se podrá calcular el valor de y).

x	y
1	3
2	1.5
3	1
4	0.75
5	0.6

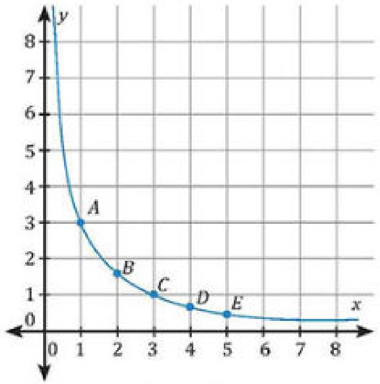


Figura 1.42

Estamos aquí frente a un problema de proporcionalidad inversa, pues mientras mayor sea el valor de la variable x, menor valor tomará la variable y.

Analicemos un poco más las relaciones directamente proporcional e inversamente proporcional:

- $y = kx$, donde x es un número cualquiera. Recordarás de grados anteriores que ella representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales (x e y). Por lo tanto, cada vez que una recta pasa por el origen del sistema cartesiano, esta representará cantidades directamente proporcionales.
- $y = \frac{k}{x}$, donde k es un número cualquiera y x toma valores positivos. Podemos escribirla también como $xy = k$, y esta es la característica de dos cantidades que se relacionan de manera inversamente proporcional (el producto de ellas es constante).

Puedes revisar este tema en el siguiente link.
Recuperado, enero 6, 2013, de:
http://www.thatquiz.org/es/previewtest?K/M/Z/I/88201331377383
Además, este interesante link que se presenta a continuación, te servirá para repasar y ejercitar el tema sobre variaciones proporcionales, recuperado, octubre 29, 2013, de:
http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas1/variacionproporcional

Ahora bien, si tenemos una relación que "eleva el número al cuadrado y luego le suma 1", ¿cómo se representaría esta relación?

Algebraicamente: $y = x^2 + 1$

Tabularmente: Tomamos algunos valores de x, cualesquiera, tratando de abarcar positivos y negativos y calculamos el valor de y.

x	y
–2	5
–1	2
0	1
1	2
2	5

Veamos otro ejemplo. Hugo está jugando en su casa y desde el segundo piso deja caer una pelotita y cuenta los rebotes. Su hermano, que lo está mirando, se acuerda de pronto que el año anterior estudió la caída libre de los objetos en física. "Mmm –dijo–, yo podría calcular la altura que hay desde el segundo piso si solo midiera el tiempo que se demora en caer la pelotita...". Cuando su hermano la soltó nuevamente, la pelotita demoró 0.8 segundos en llegar al suelo. "Ya recuerdo, la fórmula que usábamos era $d = c \cdot t^2$".

Ahora dime tú:

a. ¿Qué representan d, c y t?

b. ¿Qué clase de relación existe entre d y t?

c. Representa tabularmente la relación dada.

Respondamos las preguntas:

a. d es la distancia recorrida por la pelotita; c es la constante involucrada en este movimiento, que tiene relación con la aceleración de gravedad de la tierra y que es aproximadamente $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, y t es el tiempo que se demora la pelotita en llegar al suelo.

b. Las variables d y t se relacionan mediante una variación cuadrática, ya que la variable t (variable independiente) está elevada al cuadrado.

c. Construyamos la tabla que represente la distancia en función del tiempo tomando algunos valores para el tiempo. Nota que en este problema no tiene sentido tomar valores negativos para la variable independiente (tiempo).

Tiempo (t, en segundos)	Distancia (d, en metros)
0.2	0.2
0.4	0.8
0.8	3.2
1.2	7.2
1.6	12.8

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Marcela sabe que para recorrer la distancia de Ciudad de México a Tlaxcala demorará 1 hora, aproximadamente, si va a 115 km/h de manera constante. ¿A qué distancia se encontrará Guadalajara de Ciudad de México si Marcela se demoraría aproximadamente 6 horas en llegar allá, conservando esta misma velocidad? ¿Qué relación existe entre la distancia y el tiempo cuando la velocidad es constante? ¿Podrías escribir en forma algebraica la relación de las variables distancia y tiempo en esta situación? ¿Podrías representarla gráficamente?

SOLUCIÓN

Procedimiento: A mayor tiempo que emplee en recorrer cierto tramo a la misma velocidad se recorrerá mayor distancia en forma proporcional. Hagamos una tabla que represente la variación de la distancia en función del tiempo con los datos dados para una velocidad constante de 115 km/h.

Tiempo (t, en horas)	Distancia (d, en km)
1	115
6	690

Algebraicamente: $d = 115 \cdot t$ (debe ser de la forma $y = kx$. En este caso lo que se mantiene constante es k y debe ser igual a 115).

En la figura 1.43 se ve su forma gráfica:

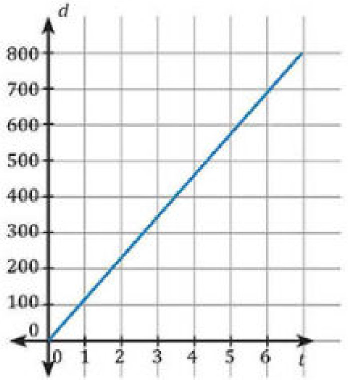


Figura 1.43

2. Mensualmente una compañía vende x unidades de un determinado artículo a p pesos cada uno, en donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación: $p = 500x$

   ¿Cuántos artículos debe vender para obtener unos ingresos de 12 500 pesos?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Partimos de la siguiente ecuación de economía.

Ingreso = Precio de venta × Número de articulos vendidos

Datos suministrados

Ingreso = 12 500 pesos

Precio de venta = $p = 500x$

Número de articulos vendidos = x

Sustituimos estos datos en la ecuación de economía, lo que nos da una ecuación cuadrática.

¿Puedes dar tú obtener esta ecuación y dar su respuesta? Justifica cada paso realizado.

Luego, Se deben vender _______ artículos para obtener 12 500 pesos de ingresos.

Y para finalizar...

Organícense en grupos de cuatro integrantes y creen una situación cotidiana que se pueda modelar mediante alguna de las representaciones gráficas aprendidas, elijan a un representante de tu grupo para exponer, justificar y defender, si es necesario, ante el resto de la clase la situación modelada, quienes deberán también validar o refutar la situación planteada y la ecuación que la modela. También, a partir de la situación creada, deben dar ejemplos de su uso utilizando distintos valores.

Comprueba tus conocimientos Tema 3

I. Lee atentamente la información dada y completa con V (verdadero) o F (falso), según corresponda, sobre el segmento punteado.

1 ____ La forma algebraica $y = 5x^2 + 4$ corresponde a una variación cuadrática.

2 ____ $y = -8x + 0{,}\bar{3}$ es un ejemplo de variación lineal cuyo valor de b es negativo.

3 ____ La variación $y = \frac{9}{x}$ se llama variación inversa.

4 ____ Cada vez que una recta pasa por el origen del sistema cartesiano, esta representa cantidades directamente proporcionales.

5 ____ En la proporcionalidad inversa la variable independiente divide a un número.

II. Justifica cada alternativa del ejercicio anterior que hayas encontrado que es falsa.

III. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Dada la siguiente representación gráfica, figura 1.44, y conforme a los puntos destacados en ella:

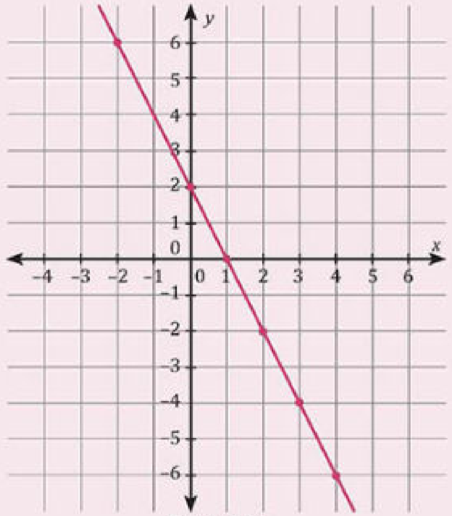


Figura 1.44

a. Haz la representación tabular respectiva.

b. Escribe la representación algebraica correspondiente.

2 Considera la siguiente forma algebraica: $y = -0.5x^2 + 5$:

a. Confecciona la representación tabular completando la siguiente tabla:

x	y
–2	
–1	
0	
1	
2	

b. Encuentra un par de puntos cuya ordenada sea –45.

3 En cada una de las siguientes fórmulas, que son formas algebraicas de algunas variaciones, remplaza x por 1, 2, 3, 4, 5, ..., y anota tus resultados en forma de una secuencia.

a. $y = 8x$ b. $y = x^2$ c. $y = x + 4$ d. $y = \frac{1}{x}$

4 – No sé qué relación se puede establecer entre la longitud de estiramiento de un resorte x con el peso F aplicado sobre él en uno de sus extremos. Observé que un resorte se estira 3.6 cm con una carga de 908g –me comenta mi primo Erasmo–

–Primo Erasmo, ¿has probado medir cuánto se estira si reduces la carga de la pesa a la mitad?

–Sí, es 1.8 cm aproximadamente y cuando apliqué una carga de 227 gm, se alargó 0.9 cm. De acuerdo a la información anterior, te pedimos que:

a. Hagas una representación tabular.

b. Confecciones un gráfico de la situación e indiques a qué tipo de variación se hace alusión.

c. Escribe la forma algebraica respectiva.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Identifico una gráfica dada con su representación algebraica			
Distingo diferentes tipos de variaciones.			
Represento algebraica y tabularmente una variación cuadrática			

Si obtuviste en todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un resumen que te permita identificar cada representación.

Nociones de probabilidad

Estudiarás en este tema

- Conocimiento de la escala de la probabilidad.
- Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Lee el siguiente relato:

En Guadalajara, los alumnos deben presentar un examen para ingresar a una escuela del nivel medio superior. El ingreso de cada alumno depende del número de aciertos que obtiene en el examen: Para ser aceptado se necesita contestar correctamente 20 reactivos o más; para simplemente ser aceptado, aunque sea en otra escuela, se necesita obtener al menos 13 aciertos; y si se contestan correctamente 12 reactivos o menos, no se puede ingresar a ninguna escuela.

El examen para el ingreso consta de 25 reactivos; cada reactivo tiene cuatro opciones, de las cuales sólo una es correcta.

Y para comenzar...

Crees que si un alumno contesta todo el examen al azar, ¿podrá entrar a la escuela que prefiere?, ¿entrará a cualquier otra escuela? o ¿no ingresará a ninguna escuela?

Matemáticamente, ¿qué es la probabilidad de un suceso?

Determina las siguientes probabilidades de forma individual y luego discute con otro compañero ambos resultados, argumentando a favor o en contra de tus resultados y los de tu compañero, según se requiere en cada pregunta:

1. Si un alumno contesta 20 reactivos de forma correcta, ¿qué probabilidad obtiene? Justifica tu procedimiento.
2. ¿Qué probabilidad se debe obtener para ser aceptado en la escuela que se prefiere? ¿Y para entrar a cualquier otra?
3. Si un alumno obtuvo una probabilidad de 0,5, ¿logra entrar a alguna escuela? ¿Por qué?
3. Si un alumno obtuvo una probabilidad de 0,6, ¿cuántas preguntas correctas obtuvo? Explica el método empleado para obtener este valor.
4 ¿Cuántas preguntas correctas deben ser respondidas para obtener una probabilidad de 0,9?
5. ¿Es posible obtener el número de respuestas correctas dadas en el resultado anterior? ¿Por qué? Explica detalladamente.

Es importante que refuerces los contenidos aprendidos en grados anteriores sobre este tema, pues te ayudarán a lograr una mejor comprensión de los nuevos temas que aprenderás a continuación.

Escala de probabilidad y relación entre sucesos

–Un día de estos me ganaré la lotería –decía en voz alta Bárbara, mientras terminaba de hacer el aseo de su casa.

–Mamá, ¿realmente crees que eso es posible?, yo creo que ni siquiera es tan probable.

–¡Ay, Pedro! tú siempre tan poco optimista.

–Mamá, no te apenes, yo no quería que dejaras de soñar –dijo Pedro–. Es solo que ganarnos la lotería no es muy probable en verdad. Tal vez podríamos pensar en algo que fuera más posible que obtener dinero en un juego de azar.

–Sí, hijo, tienes razón, pero soñar no cuesta nada. Además, todos soñamos con ganar la lotería alguna vez. No te preocupes, no estoy triste.

Ahora piensa tú en los siguientes sucesos: "Sacar un número par al lanzar un dado de seis caras", "obtener sol o águila al lanzar una moneda", "extraer una bolita negra de una caja que contiene bolitas rojas y blancas", "elegir una niña de un grupo de 12 niñas y 2 niños", "ganarse la lotería".

- ¿Son todos igualmente probables? Reúnete con otro compañero y explícale el criterio adoptado para dar tu respuesta.
- ¿Podrías ordenarlos, según la probabilidad de ocurrencia, de mayor a menor? Compara y justifica tu respuesta con tu compañero.

Cada vez que hacemos un orden de este tipo, estamos utilizando una ***escala de probabilidad***, que ordena los sucesos según sean más o menos probables. Como cada uno de nosotros podría tener su propia escala, hay ciertos criterios que se han acordado. Así, la escala que usaremos es la siguiente, según el valor de la probabilidad que tenga un suceso:

Probabilidad de un suceso (en porcentaje)	Ubicación en la escala de probabilidad
0	Su ocurrencia es imposible
]0,25]	Su ocurrencia es remotamente posible
]25,50[	Su no ocurrencia tiende a ser más posible que su ocurrencia
50	Su ocurrencia es igualmente posible que su no ocurrencia
]50,75]	Su ocurrencia tiende a ser más posible que su no ocurrencia
]75,100[	Su ocurrencia es muy posible
100	Su ocurrencia es segura

Probable: suceso que posee buenas razones para creer que se verificará o sucederá.
Posible: evento que puede ser o suceder.

Más que...

Existen cuatro tipos de intervalos. Estos son:

- $[a,b]$ cerrado: Ambos números límites, a y b, pertenecen al intervalo.
- $[a,b[$ abierto por la derecha: El límite de la izquierda (límite inferior) pertenece al intervalo, pero el límite de la derecha (límite superior) no.
- $]a,b]$ abierto por la izquierda: El límite de la izquierda (límite inferior) no pertenece al intervalo, pero el límite de la derecha (límite superior) sí.
- $]a,b[$ abierto: Ninguno de sus límites, ni a ni b, pertenecen al intervalo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Adelaida tiene una caja con fichas numeradas del 1 al 30. Con su amiga han inventado un juego. Una de ellas sacará una ficha de la caja. Si esta es un número múltiplo de 6, entonces le entregará a la otra un peso. De lo contrario, ella recibirá un peso. Luego le tocará el turno a la otra, pero antes deberán devolver la ficha extraída la primera vez. Si parte Adelaida, ¿qué tan probable es que ella deba darle un peso a su amiga?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Calculemos primero la probabilidad de extraer un número que sea múltiplo de 6. Existen 5 múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24 y 30, de los 30 números que hay en la caja,

esto es, $P(\text{múltiplo de } 6) = \frac{5}{30} \approx 0.17 = 17\%$.

Según nuestra escala de probabilidad, es remotamente posible que Adelaida le dé un peso a su amiga.

2. Luis ha confeccionado un dado de veinte caras, un poco distinto a los convencionales. Si al lanzar el dado se debe obtener múltiplo de 3 o número primo para seguir en competencia ¿qué tan probable es que al lanzarlo efectivamente siga en competencia?

SOLUCIÓN

Procedimiento: La probabilidad del suceso que se quiere, llamémoslo A, será:

$P(A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$

Por lo tanto, según nuestra escala de probabilidad, es más probable que Luis siga en competencia, que no lo haga.

Supongamos ahora que al lanzar un dado cualquiera queremos calcular la probabilidad de que el resultado obtenido sea un número menor o igual a dos. Entonces, escribiremos que:

$P(\text{resultado} \leq 2) = \frac{2}{6}$. Ahora bien, ¿cuál será la probabilidad de obtener un número mayor que 2? Esta será: $P(\text{resultado} > 2) = \frac{4}{6}$. Si te fijas, hay aquí dos situaciones importantes de analizar y pensar.

La primera es que en el contexto de los dados (en el mismo universo) uno de ellos es el contrario del otro. A este tipo de sucesos se les llama *Sucesos complementarios*.

La segunda es que la suma de las probabilidades de ambos sucesos es 1 (ya que completan todas las posibilidades de ocurrencia).

Intervalo: subconjunto de números reales.

Para saber más puedes ir a estos sitios en la web. Recuperados, enero 10, 2013, de:
http://www.aulafacil.com/CursoEstadistica/Lecc-17-est.htm
http://www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm
http://ciberconta.unizar.es/LECCION/probabil/INICIO.HTML

Pensemos un poco más. Si miramos estos sucesos complementarios, uno excluye la ocurrencia del otro. ¿Habrá otros sucesos similares sin necesariamente ser complementarios?

En efecto, es posible. Pensemos en las bolas de colores en una caja. La ocurrencia de salir amarilla excluye la ocurrencia de salir de otro color, pues no puede ser que al extraer una bola de la caja, esta salga, por ejemplo, amarilla y azul al mismo tiempo.

Diremos entonces que cuando existen dos o más sucesos en que la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia del otro o de los otros, entonces ellos se llamarán *Sucesos mutuamente excluyentes*.

Nota que todo par de eventos complementarios son también mutuamente excluyentes (pues no pueden producirse al mismo tiempo).

Lee ahora, con atención, el siguiente problema: "Sara ha ido a la casa de unas amigas. Allí jugarán hoy 'dado y moneda', un juego que han inventado hace algún tiempo. En cada partida, cada una coloca algún adorno pequeño (ya sea personal o para la casa) en el centro de la mesa. Una de ellas tira un dado y una moneda, si logra obtener un seis en el dado y una cara en la moneda, se lleva los objetos del centro de la mesa. Si no, el turno de tirar es de la persona que está a su derecha. Cuando alguna se lleva los objetos del centro de la mesa, es tiempo de que todas vuelvan a colocar nuevos objetos. El juego termina cuando se terminan los objetos o cuando se aburren".

Fíjate en los sucesos involucrados.

- ¿Cuáles son?, ¿qué puedes decir de ellos?, ¿que ocurra uno afectará en que ocurra el otro?

Veamos. Los sucesos involucrados son "lanzar un dado" y "lanzar una moneda". Estos son sucesos distintos; ellos tienen diferentes espacios muestrales y la ocurrencia de uno de ellos no depende de la ocurrencia del otro. A este tipo de sucesos se les llama *Sucesos independientes*. (Justamente porque la ocurrencia de uno no depende de la ocurrencia del otro).

Recuerda y registra...

Un suceso es complementario de otro si es el contrario de este, y además si la suma de las probabilidades de ambos sucesos es 1.

Dos o más sucesos son mutuamente excluyentes cuando la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia del otro o de los otros.

Sucesos independientes son aquellos con distintos espacios muestrales, en que la ocurrencia de uno de ellos no depende de la ocurrencia del otro.

Ahora, ejercitaremos el contenido sobre los distintos tipos de sucesos, pare ello, reúnete con tres compañeros, discutan y decidan el tipo de suceso involucrado. Expliquen en cada caso su decisión.

1. Una persona debe extraer un número de una urna y lanzar un dado.

   Si la persona lanza el dado y luego extrae de la urna el número, ¿influirá el primer acontecimiento en el segundo acontecimiento realizado? Explica.

   Por lo tanto el suceso es de tipo ______________________________.

2. Marisol da un examen en una de las materias de su carrera. Obtener o no una calificación sobre 7.

   Si Marisol obtiene una calificación sobre 7, ¿es posible que en el mismo examen obtenga una calificación bajo 7?

   Por lo tanto el suceso es de tipo ______________________________.

3. En una convención de médicos realizada en Cuernavaca, asisten 95 cardiólogos, 24 oncólogos, 33 pediatras y 65 geriatras. Al nombrar dos personas al azar, que una de ellas sea geriatra y que la otra sea cardiólogo.

   Si una de las personas es cardiólogo, ¿puede tener otra especialidad? ¿Por qué?

   Por lo tanto el suceso es de tipo ______________________________.

Y para finalizar...

Haz una lista de 10 eventos de situaciones que podrías vivir en una semana y clasifícalos según la escala de probabilidad estudiada. Luego, reúnete con no más de tres compañeros e intercambien y discutan sobre las situaciones enunciadas; tanto sobre la clasificación dada a cada uno de ellos, así como el criterio utilizado para darle esta clasificación. Argumenta a favor o en contra de tus resultados y los de tus compañeros y elijan a un representante para que comunique una situación de cada integrante del grupo, su clasificación y su justificación al resto del curso.

Comprueba tus conocimientos Tema 4

I. Frente a cada una de las siguientes afirmaciones, coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

1 ____ Hay sucesos en que la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro.

2 ____ Para que un suceso sea muy posible que suceda, en la escala de probabilidad debe encontrarse en el intervalo]50,75] de porcentaje.

3 ____ Puede haber sucesos que sean mutuamente excluyentes pero no complementarios.

4 ____ La posibilidad de que al lanzar un dado de diez caras, numeradas del 1 al 10, aparezca cualquiera de ellos es muy remota.

5 ____ Una escala de probabilidad ordena los sucesos según sean más o menos probables.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Juan dice que para él es posible que no ocurra que al lanzar una moneda de un centavo al aire salga cara y cruz a la vez, pero al lanzar dos monedas, sí ocurre.

a. ¿A qué tipo de sucesos se refiere "que no puede salir cara y cruz a la vez al lanzar una moneda"?

b. ¿Por qué no es completamente correcto decir que "al lanzar dos monedas, sí ocurre"?

2 Rosalba está viendo una película por la TV. Escuchemos junto a ella algunos segmentos de diálogos:

–¡Te subes al tren o no, querida!

–¡Y Candelario! No lo haré. Además que cada vez que discutimos antes de abordarlo, algo malo nos pasa...

–No digas bobadas, querida Nélida, no hay ninguna relación entre nuestras discusiones y lo que fortuitamente nos pase.

–Mientes. Tú no siempre tienes toda la razón.
La mayoría de las veces te equivocas y no lo reconoces.

–No te enfades... ¡bien sabes que me es imposible dejar de quererte!

Ahora bien, dejemos a Rosalba y Candelario, y conforme a esta plática, responde. ¿Qué tipo de sucesos son:

a. "tener una discusión y suceder algo malo"?

b. "subir al tren" o "no subirse al tren"?

c. Di un suceso seguro.

3 Esperanza y su compañera están repasando su clase de Matemáticas. Lamentablemente, no entienden muy bien la diferencia entre los tipos de sucesos que han estudiado. Ayúdalas tú.

a. Recordándoles lo que son *sucesos independientes* y mencionando alguno.

b. Dando un ejemplo en que se diferencien los sucesos mutuamente excluyentes de aquellos que son complementarios.

c. Y, de igual manera, sugiriéndoles un ejemplo en que dos sucesos no sean independientes para que ellas busquen más.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Puedo explicar lo que es una escala de probabilidad			
Puedo explicar cómo y en qué se usa una escala de probabilidad			
Puedo explicar cuándo dos sucesos son mutuamente excluyentes			
Puedo explicar cuándo dos sucesos son complementarios			
Entendí los ejercicios resueltos			
Pude resolver correctamente los ejercicios propuestos			

Debes hacer nuevamente los ejercicios o volver a repasar los conceptos en los que has marcado +/– o los temas más débiles. Consulta tus dudas con tu maestro(a) o compañeros(as).

Análisis y representación de datos

Estudiarás en este tema

- Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio.
- Discusión sobre las formas de elegir el muestreo.
- Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

En internet, en la página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía se encontró la información de la figura 1.46.

Fuente: Indicadores Sociodemográficos de México (1930 - 2000) sobre esperanza de vida según sexo, 1990 a 2012.

Figura 1.46

Y para comenzar...

Reúnete con dos compañeros más y respondan, argumentando y justificando entre sí sus respuestas:

1. De acuerdo a la información entregada por la gráfica, ¿es posible decir que la esperanza de vida de la población mexicana ha aumentado más del doble en el último siglo, aproximadamente? Justifica tu respuesta.
2. ¿Esta esperanza de vida ha aumentado más en hombres o en mujeres? Explica.
3. ¿Entre qué años, el aumento de la esperanza de vida ha sido más rápida? Justifica.
4. ¿Entre qué años, el aumento de la esperanza de vida ha sido más constante? Justifica.
5. Discute y argumenta sobre los posibles factores que han influido en este aumento.
6. Según la información visual proporcionada por el gráfico, ¿crees que si analizáramos los datos para el año 2050, la esperanza de vida nuevamente se duplicaría? ¿Por qué?
7. ¿Qué tendencia se visualiza en este gráfico, constante o de crecimiento rápido?

Es necesario que repases y refuerces los contenidos ya estudiados anteriormente con respecto al análisis y la representación de datos, pues te servirán para abordar de mejor manera los nuevos aprendizajes.

Encuestas, población y muestra

–Yo sé –decía Alonso– cómo representar datos en tablas y gráficos, sé también cómo calcular la media o promedio de un conjunto de datos. Y además sé que cuando nos muestran los resultados de una encuesta, estos se utilizan para decidir determinadas acciones.

–Bueno –le respondía su papá– y entonces, ¿qué no sabes?

–No sé, papá, cómo se confecciona una encuesta ni cómo se eligen las personas a las que se les pregunta. Lo que es a mí, nunca nadie me ha encuestado y por ahí andan diciendo que "en México, en los últimos 12 meses, sólo 27% de la población ha leído un libro; 86% nunca ha ido a una exposición; 43% no conoce una biblioteca" (Diario el Universal).

¿Cómo se diseña una encuesta?

Todo parte con algún tema que tenga relación con la opinión o comportamiento de las personas o con algún experimento por realizar.

Para el primer caso mencionado necesitamos confeccionar una encuesta que las personas puedan contestar y para el segundo, debemos determinar las condiciones en las que se realizará el experimento.

Enfoquémonos en la encuesta que recoge datos de opinión o comportamiento de las personas. Los pasos para su diseño serán:

- Definir el tema sobre el que se quiere averiguar: Este debe ser acotado y específico. Mientras más claro sea este, es más fácil dirigir las preguntas y definir las variables involucradas. Por ejemplo, se desea averiguar el comportamiento de la población del municipio de Pueblo Nuevo del estado de Guanajuato con respecto al consumo de cigarrillos: La edad en que se comienza a fumar, la cantidad de personas que lo hacen, el número de cigarrillos que consumen al día, el porqué fuman el dinero que invierten al mes en cigarrillos, etcétera.
- Definir las variables involucradas: Cada una de las preguntas específicas que se han planteado sobre el tema define una variable en estudio. En nuestro ejemplo anterior, las variables serían: edad en que se comienza a fumar, número de cigarrillos consumidos diariamente, razón por la que se fuma, cantidad de dinero gastada al mes en cigarrillos, etcétera.

  Nota que algunas de estas variables se miden numéricamente (como la cantidad de cigarrillos que una persona fuma al día: 1, 2, 3, etcétera.) y otras se miden a través de conceptos (como el ser fumador: sí o no). A las primeras se les llama ***variables cuantitativas*** y a las segundas se les llama ***variables cualitativas***.

www Visita el siguiente link en el que se expone una forma particular de encuesta, como es la entrevista, recuperado, octubre 29, 2013, de: *http://www.uaeh.edu.mx/docencia/P_Presentaciones/prepa4/investigacion/investigacion.pdf*

- Definir las preguntas que compondrán la encuesta: Estas deben ser, en lo posible, de respuesta cerrada, es decir, la persona debe elegir entre las alternativas dadas. De esta manera se evita un universo muy amplio de respuestas y, por lo tanto, difícil de cuantificar y analizar. Las preguntas deben tener un vocabulario adecuado y fácil de entender. Por ejemplo:

1. ¿Usted fuma?
a. Sí.
b. No.
Nota que la variable es cualitativa y la respuesta no necesita de escalas o rangos posibles de medición.

2. ¿A qué edad comenzó usted a fumar?
a. Entre 8 y 12 años.
b. Entre 13 y 17 años.
c. Entre 18 y 22 años.
d. Entre 23 y 27 años.
e. Otra (especifique) ____________________
Nota que aquí la variable es cuantitativa y su manera de ser medida es en intervalos.

3. ¿Usted se considera...
a. fumador ocasional?
b. fumador frecuente?
c. fumador habitual?
Nota que esta variable es cualitativa, pero su respuesta está graduada. La llamaremos *escala nominal*.

4. ¿Cuántas personas en su casa fuman sin contarlo a usted?
a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. Otro (especificar) ____________________

No importa el número de preguntas que tenga la encuesta. Lo importante es que abarque todas las posibles variables que sean de interés para el tema que se quiere averiguar. De manera que al momento del análisis de los datos no queden aristas que no hayan sido abordadas.

Hay sitios que te ayudarán a diseñar una encuesta. Algunos de estos son: *http://es.surveymonkey.com/* *http://www.e-encuesta.com/index.do* Recuperados, enero 15, 2013.

Si lo que deseas es averiguar sobre los resultados de un experimento, procederemos de la siguiente manera:

- Establecer lo que se quiere averiguar o comprobar: Este tema debe ser posible de medir a través de un experimento y generalmente responde a una hipótesis planteada. Por ejemplo, las personas del municipio de Ojinaga en el estado de Chihuahua prefieren los carros blancos. Esta será la hipótesis.
- Diseñar el experimento: Este experimento, que nos entregará los datos para analizar, consistirá en chequear el color de los carros en las calles. Una posible hoja de recolección de datos puede ser:

Color del carro	Nº de patente	Lugar

Habilidades por desarrollar: diseñar – aplicar.

En un laboratorio se realizará un experimento sobre la cantidad de peso que es capaz de sostener cierto resorte. ¿Cuál podría ser el experimento y cómo se recolectarían los datos? ¿Existe población y muestra en este experimento?

¿Cómo se obtienen los datos?

En la respuesta a esta pregunta subyacen dos conceptos importantísimos en estadística: **población y muestra.**

Volvamos al tema inicial de la encuesta: "Se desea averiguar el comportamiento de la población del municipio de Pueblo Nuevo del estado de Guanajuato con respecto al consumo de cigarrillos".

Si pensamos en este tema, lo lógico sería que para tener una visión completa les preguntáramos a todas las personas que habitan este municipio, 11169 (según INEGI, 2010), pues esta es nuestra **población** de estudio. Sin embargo, esto es inviable: además sería muy costoso económicamente y demandaría mucho tiempo, por lo tanto, lo que se hace es escoger una **muestra**, parte más pequeña de la población que es la que realmente será encuestada.

En síntesis, la **población** es el conjunto de todos los datos posibles de obtener, y la **muestra** es un subconjunto de la población.

Nota que la única encuesta que se hace a nivel de país en que la muestra es igual a la población es el Censo, que se utiliza para saber cuántos habitantes somos y cómo vivimos.

Hipótesis: proposición que se ha hecho sobre la base de la observación de ciertos comportamientos, la que debe ser corroborada o refutada.

Escogiendo la muestra

Como la muestra es una parte de la población, se debe tener mucho cuidado en escogerla, de manera que esta sea lo más representativa posible.

Piensa en nuestro tema del consumo de cigarrillos. Si la muestra que se elija solo considera personas de entre 8 y 15 años, no representará a la población. Si solo se escogen personas de una determinada parte del municipio, tampoco representará a toda la población. Si solo se seleccionan 10 personas para ser encuestadas, la muestra será muy pequeña comparada con los habitantes del municipio.

Entonces, ¿qué características debería tener una muestra para que fuera representativa y los resultados de la encuesta fueran válidos?

- Tener las características fundamentales de la población. Por ejemplo, mantener la proporción de hombres y mujeres de la población, mantener la proporción entre estratos sociales de la población, etcétera.
- Escogida al azar: La muestra debe ser escogida al azar para no tener sesgo. Por ejemplo, se encuestará a las personas que viven en las casas de números impares de las cuadras numeradas como pares en el mapa de la ciudad.
- Tamaño de la muestra: Ciertamente este dependerá del número de la población, y mientras más grande sea la muestra, más confiables serán los resultados que se puedan obtener y las conclusiones que se puedan sacar. Existen fórmulas matemáticas que dependen del nivel de confianza que se quiera obtener y de las características de la población. Estas fórmulas requieren saber más matemáticas de la que tú sabes. Por lo general, son las personas que estudian Estadística las que las manejan. Para que tengas una idea te mostramos aquí un cuadro hecho del tamaño, n, que debiera tener una muestra para una población de tamaño N bajo ciertas características que permiten un margen de error del 3%. Recuperado, enero 17, 2013 de: *http://personal.us.es/vmanzano/docencia/analisis/docs/nMuestra.pdf)*

N	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
n	10	92	517	965	1056	1066	1067	1068	1068

  Esto te dará una noción del tamaño de una muestra que puedas escoger.

- Debe ser accesible: Se debe tener acceso a las respuestas de las personas. Si se escogen personas que viven alejadas del sector donde se está realizando la encuesta, una buena forma sería encuestar vía telefónica, en el caso de contar con este medio. Si bien es cierto el cómo se recolectarán los datos está relacionado con la obtención de datos, esto se debe prever al momento de la elección de la muestra.

Sesgo: error sistemático en una medición.

¿Cómo se obtienen los datos?

Una vez que se ha escogido la muestra y la forma como se va a llevar a cabo la encuesta o el experimento, es momento de ir a terreno y realizarla.

Recuerda que:

- el encuestador debe ser claro al momento de explicar la finalidad de la encuesta.
- el encuestador no puede influir en las respuestas del encuestado.
- no deben quedar preguntas sin contestar y se debe guiar al encuestado para que sea lo más preciso posible en caso de respuestas abiertas (por ejemplo, aquellas en las que se debe dar una opinión).

Una vez efectuada la encuesta, comienza el proceso de tabulación y presentación de la información.

Si lo que se realizó fue un experimento, hay que ser cuidadoso en que las condiciones del experimento hayan sido las planteadas, de manera que los resultados de este no estén afectados por condiciones que puedan distorsionarlos.

¿Cómo se presenta la información?

Los datos obtenidos en las encuestas o en los experimentos se pueden presentar, fundamentalmente, de dos maneras: en forma de tablas y gráficamente. Ambas ya conocidas por ti.

En las tablas se coloca, por lo general, la variable y las frecuencias absoluta y relativa. Los gráficos pueden ser histogramas, gráficos de barra, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, etcétera., como los representados en las figuras 1.47 y 1.48.

N° de hermanos	Frec. absoluta	Frec. relativa
1	12	0.27
2	18	0.41
3	8	0.18
4	6	0.14

Litros de leche consumidos semanalmente	Frec. absoluta	Frec. relativa
[1 - 4[	35	0.44
[4 - 7[	21	0.26
[7 - 10[	9	0.11
[10 - 13[	15	0.19

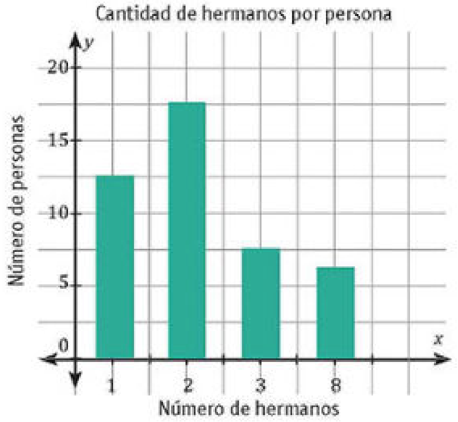


Figura 1.47

Figura 1.48

Y para finalizar...

Reúnete con dos compañeros más y busquen en diarios, revistas o internet los resultados de alguna encuesta reciente sobre algún tema que les interese.

Analícenla y discutan utilizando los criterios recién aprendidos: ¿qué información entrega sobre su diseño: preguntas, elección de la muestra, etcétera?

Luego, realicen una presentación de los datos de esta encuesta, mostrando los resultados que consideren más importantes, y explicándolos ante sus compañeros de clase.

Comprueba tus conocimientos Tema 5

I. Coloca V(verdadero) o F(falso) frente a cada afirmación según corresponda.

1 ___ La población y la muestra en un estudio estadístico siempre deben ser de distinto tamaño.

2 ___ La muestra debe ser escogida según el tamaño de la población.

3 ___ Las preguntas en una encuesta deben fluctuar solo entre 10 y 20.

4 ___ Mientras más acotadas sean las preguntas, es más fácil tabular los datos posteriormente.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Se desea conocer la opinión de un grupo de personas, previamente seleccionadas al azar, acerca de una bebida de consumo masivo y su competidor en marca. Para ello se ha colocado un puesto donde las personas prueban ambas bebidas en vasos que las hacen indistinguibles:

a. ¿Es esta una manera válida de encuesta?

b. Plantea dos posibles preguntas para formular a las personas.

c. ¿Cuáles son las variables involucradas en dichas preguntas?

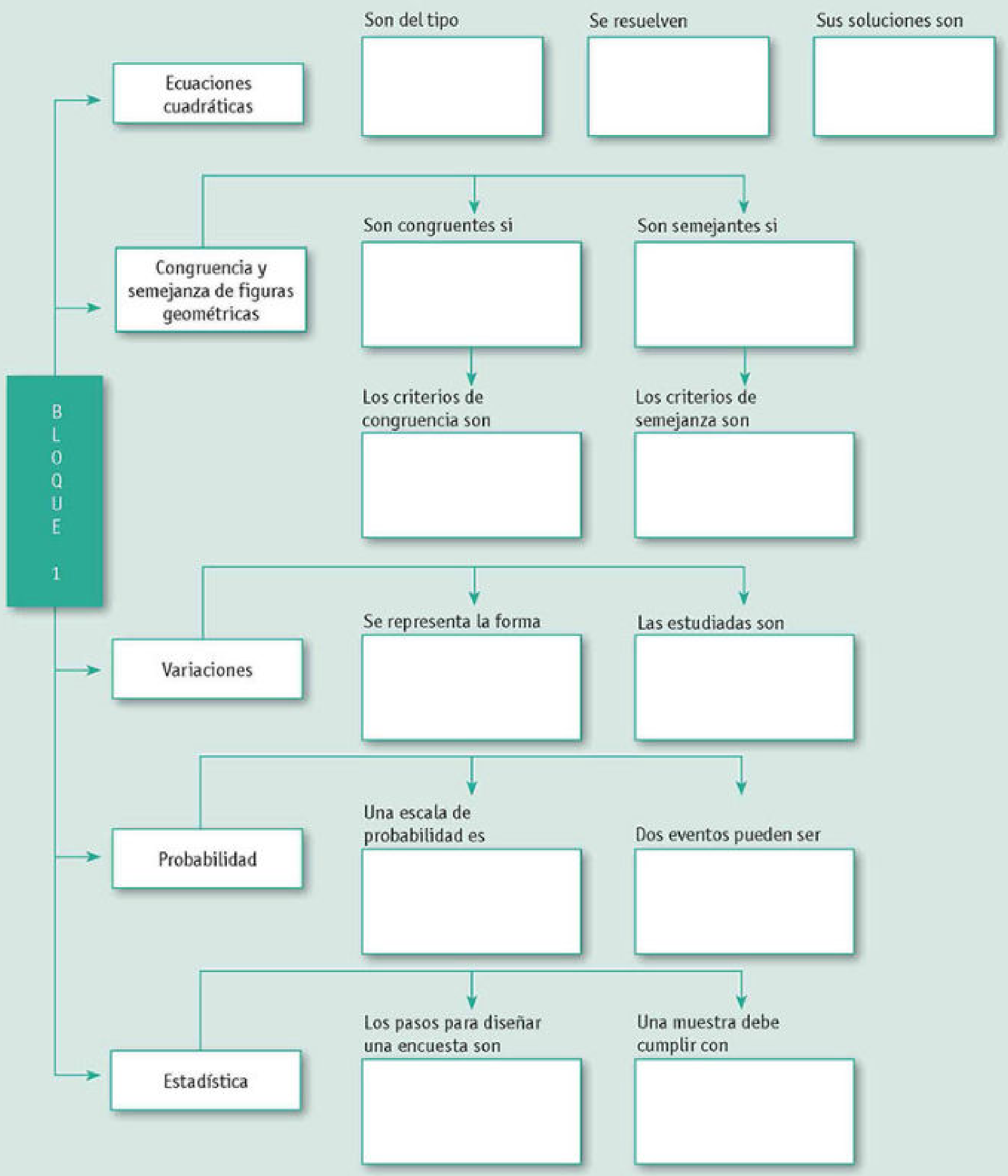
2 En tu curso forma grupos de máximo 4 personas. En cada grupo escojan un tema de interés que puedan sondear en tu escuela. Determinen la población y muestra. Escojan las variables involucradas en el tema y diseñen la encuesta. Encuesten a la muestra escogida y luego presenten la información a su curso.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Puedo explicar lo que es una encuesta			
Puedo explicar cómo se diseña una encuesta			
Puedo explicar qué es la población en una encuesta			
Puedo explicar qué es una muestra			
Puedo explicar qué características debe tener una muestra			
Puedo señalar cómo se escoge una muestra			
Puedo explicar cómo se presentan los datos recogidos en una encuesta			
Entendí los ejemplos de esta sección			
Pude resolver correctamente los ejercicios propuestos			
Colaboré con mi grupo de compañeros cuando trabajamos juntos			

Si obtuviste en todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un resumen que te permita identificar los pasos de una encuesta.

Síntesis Bloque 1

A continuación se presenta un mapa conceptual que resume las ideas más importantes que se han enseñado en este bloque. Debes completarlo con los conceptos más importantes abordados.



Comprueba tus conocimientos Bloque 1

I. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda antes de cada una de las siguientes afirmaciones:

1 ____ La ecuación $x^2 - 9 = 0$ tiene dos soluciones que son números enteros.

2 ____ Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + c = 0$, donde c es un número cualquiera, siempre tiene dos soluciones.

3 ____ Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

4 ____ La representación gráfica de una variación de proporcionalidad inversa es una línea recta que no pasa por el origen.

5 ____ Si un evento tiene una probabilidad de ocurrencia del 45%, entonces podemos decir que su ocurrencia tiende a ser más posible que su no ocurrencia.

6 ____ Los eventos "obtener una suma mayor que 6 de sus pintas al lanzar dos dados" y "obtener una suma menor que 6 de sus pintas al lanzar dos dados" son complementarios.

7 ____ En una encuesta, cada una de las preguntas debe recoger la mayor cantidad de información posible. Por eso, es bueno que estas sean abiertas, para que cada encuestado pueda responder extensamente.

II. Desarrolla los siguientes ejercicios y problemas en tu libreta:

1 Néstor suele jugar a las adivinanzas con sus compañeros. Esta vez él ha traído una un poco diferente. –Estoy listo –le ha dicho Diego, quien siempre ganaba.

–Muy bien –dijo Néstor– aquí va: "Si al cuadrado del antecesor del quíntuplo de mi valor le agregaras diez veces quien soy, ya tendrías un centenar y uno más. ¿Qué número soy?". Diego lo pensó por largo rato y esta vez perdió... ¿Puedes tú resolver la adivinanza?

2 Rubén está postulando al puesto de vendedor de computadores. A él le han ofrecido como salario 2 000 pesos como sueldo base y una comisión del 1% sobre el promedio de las ventas mensuales. Realiza los siguientes cálculos y determina:

a. La relación entre el sueldo (S) que recibiría Rubén en función de las ventas (v) que realice mensualmente.

b. ¿Qué tipo de variación es esta?

c. Su representación gráfica.

3 Antonieta tiene un problema. Necesita copiar la figura 1.49, de manera que tenga la misma forma, pero que a la vez todas sus medidas sean $\frac{1}{3}$ más grandes... Ayuda a Antonieta con su problema.

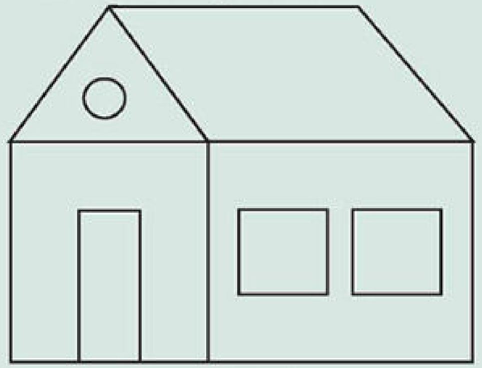


Figura 1.49

4 Calcula la probabilidad pedida del evento: "Se tiene una urna con 10 cuadrados de papel de color rojo, 12 amarillos y 6 blancos. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un papel amarillo?

5 ¿Son los sucesos mutuamente excluyentes necesariamente complementarios? Justifica tu respuesta y da un ejemplo.

6 Para la siguiente situación, define la población y una posible muestra: "Se desea hacer un estudio sobre la opinión de los habitantes del municipio de Cumpas en el estado de Sonora sobre el consumo de agua en la población".

1 La siguiente tabla muestra el porcentaje de la población de cierta ciudad que consume vegetales según las porciones diarias de estos.

Porciones	Porcentaje
0	2%
1	15%
2	33%
3	28%
4	12%
5	10%

¿Cuál consideras que sería el gráfico más apropiado para presentar esta información? Justifica tu respuesta. ¿Se podría representar esta información en un gráfico de barras? ¿Por qué?

2 Un caballo está amarrado a una estaca por una cuerda de 3 metros. Si el caballo siempre da vueltas alrededor de la estaca con la cuerda tensa, ¿cuántos metros recorrerá aproximadamente en 7 vueltas? (Considera $\pi = 3$)

3 Valentina ha ido de compras junto con su mejor amiga. Ella ha comprado un pantalón, una blusa y un par de zapatos y pagó por todo 2 620 pesos. Si sabemos que el par de zapatos costó el doble del precio de los pantalones más 170 pesos y la blusa costó 510 pesos menos que los pantalones, ¿cuál es el precio que Valentina pagó por sus pantalones?

4 Rodolfo está armando un juego de azar para presentarlo como proyecto de matemáticas para su escuela. Él ha diseñado una tómbola en la que colocará bolitas de tres colores: rojo, blanco y verde. Si él quiere que la probabilidad de obtener una bolita verde sea del 35%, ¿con cuáles de las siguientes combinaciones se obtendrá lo pedido?

a. 50 blancas, 35 verdes y 15 rojas
b. 16 blancas, 14 verdes y 10 rojas
c. 9 blancas, 21 verdes y 30 rojas
d. Ninguna de las anteriores (ni a, ni b, ni c)
e. Todas las anteriores (a, b y c)

Evaluándonos

Autoevaluación

Realiza esta autoevaluación sobre tu desempeño en este bloque, de manera responsable y honesta, pues esta información te ayudará a remediar y mejorar tu desempeño.

Contenido	Sí lo logré	Me falta mejorar
Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.		
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.		
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.		
Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.		
Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.		
Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.		
Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.		

Heteroevaluación

Pídele a un compañero que valore si:

Actitud	Sí lo hice	Me sugieren mejorar
Colaboré con mis compañeros aportando, argumentando sobre los procedimientos que utilizaron.		
Participé activamente en las actividades grupales propuestas.		
Cuando tuve que exponer las ideas y resultados del grupo, lo hice claramente y expresando todo lo que el grupo requirió.		
Expuse mis ideas claramente y respetando siempre la opinión de los demás integrantes.		

Heteroevaluación

Solicita a tu maestro que analice tu desempeño y te sugiera estrategias para mejorar.

Al finalizar el bloque, el alumno:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Estudiarás en este bloque:

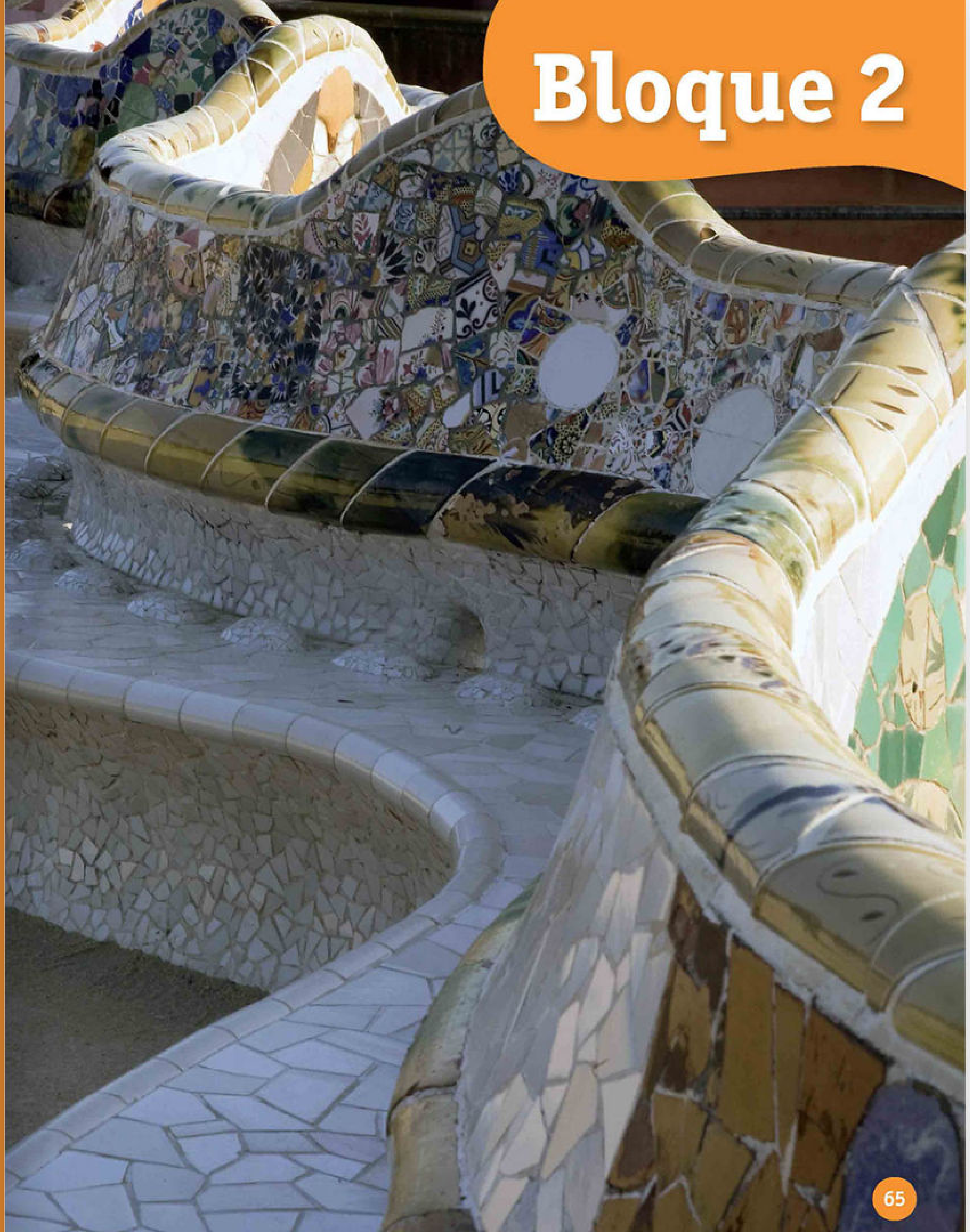
Tema 1: Patrones y ecuaciones
- Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Tema 2: Figuras y cuerpos
- Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
- Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Tema 3: Medida
- Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Tema 4: Nociones de probabilidad
- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Bloque 2



Patrones y ecuaciones

Estudiarás en este tema

- Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Realiza la siguiente actividad:

1. Fabrica con cartulina 5 elementos, de cada uno, representados en la figura 2.1, escribe en el centro de cada uno lo señalado:

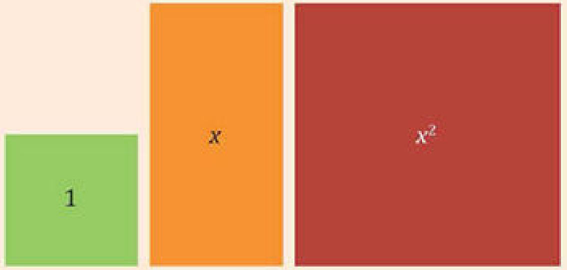


Figura 2.1

Fabrica el cuadrado , con la medida de su lado igual a 5 cm, las medidas de los lados del rectángulo deben ser de 5 cm y 10 cm respectivamente y la medida del lado del cuadrado de 10 cm.

Así, el cuadrado representa un cuadrado de lado 1 u, luego su área se determina como: Área $= 1$ u $\cdot$ 1 u $= 1$ u^2. El rectángulo representa un rectángulo de lados 1 u y x u respectivamente, por lo que el valor de su área será: Área $= 1$ u $\cdot\, x$ u $= x$ u^2, por último, El cuadrado representa un cuadrado de lado x u y el valor de su área será: Área $= x$ u $\cdot\, x$ u $= x^2$ u^2

Y para comenzar...

Observa las figuras y responde:

¿Qué relación hay entre la medida del lado de y el ancho de ? ¿Y entre la medida del largo de y la medida del lado de ?

2. Con estas figuras podemos representar un polinomio cuadrático, seleccionando la cantidad de fichas de cada tipo, dependiendo del polinomio que queramos representar, y construyendo formas cuadradas o rectangulares, de acuerdo a unas reglas de construcción que indicaremos luego.

   Para esto, reúnete con dos compañeros más y representa el polinomio $x^2 + 4x + 3$ utilizando para ello las fichas fabricadas anteriormente. ¿Cuántas fichas de cada figura debemos seleccionar para esta representación? Discutan y justifiquen esta elección con su grupo.

3. Ahora, para ordenar estas figuras, ubiquen primero los cuadrados en forma lineal o cuadrada. Luego, ubiquen la figura , a la derecha y abajo, tratando de dejar el espacio exacto para ubicar la figura . Les mostramos a continuación, en la figura 2.2, como debe quedar esta configuración, para el polinomio dado anteriormente:

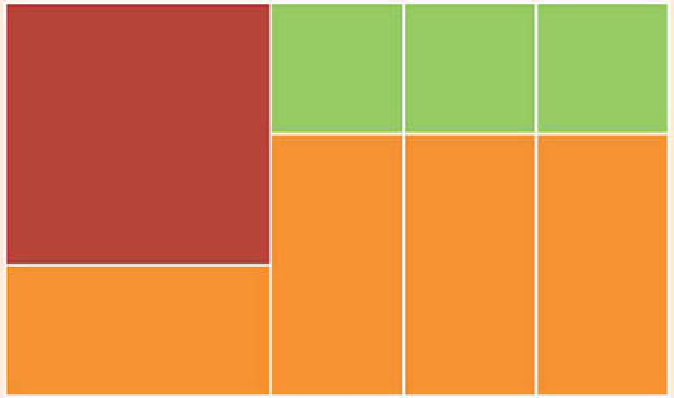


Figura 2.2

   La factorización del polinomio $x^2 + 4x + 3$ corresponderá al área del rectángulo obtenido, la cual como recordarás, se obtiene multiplicando su base por su altura. ¿Cuál es esta expresión? Discútanla y escríbanla, verificándola algebraicamente.

4. Ahora, con tus compañeros de grupo elijan un polinomio, que luego representarán y factorizarán, siguiendo todos los pasos que te hemos mostrado. A continuación, expónganlo y justifiquen detalladamente al resto de la clase.

   Para un real aprendizaje de este nuevo contenido, es necesario que comprendas y domines los conocimientos que ya habías adquirido en grados anteriores, pues te serán muy útiles para la comprensión de este nuevo tema.

Factorizar: descomponer un polinomio o expresión algebraica como el producto de otros polinomios de menor grado.

Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización

–Bernardo, ¿me ayudas con este problema de matemáticas?

–Muéstramelo, Verónica, veamos qué podemos hacer.

–Debo construir un triángulo, de modo que su base exceda en dos unidades a su altura y su área mida seis veces esta última... ¡Qué enredo!

–Calma, hagamos un dibujo de la situación; un buen bosquejo siempre ayuda (figura 2.3).

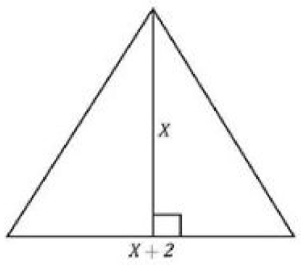


Figura 2.3

Ahora bien, planteemos lo que nos dice el problema:

área $= 6 \cdot$ altura

$\frac{(x+2)x}{2} = 6x$ *(multiplicando cruzado (por 2))*

$(x+2)x = 12x$ *(resolviendo el paréntesis)*

$x^2 + 2x = 12x$

–¡Mmm... es una ecuación cuadrática, pues aparece en ella la incógnita elevada a dos! Pero ¿ahora qué hacemos? Bernardo, yo solo sé resolver ecuaciones cuadráticas donde no aparecía la incógnita elevada a uno. ¿Este es otro tipo?

–Calma, Verónica, no te apresures. Efectivamente, este es otro tipo de ecuaciones cuadráticas. Solo pensemos y ayudémonos con mi cuaderno del año pasado. Aquí necesitaremos factorizar. Mira, restemos $12x$ para dejar uno de los miembros de la ecuación igual a cero. La ecuación quedará entonces como:

$x^2 - 10x = 0$ *(factoricemos por x (factor común))*

$x(x - 10) = 0$

Ahora pensemos un poco. ¿Qué condición debe cumplir una multiplicación (o producto) para que sea igual a 0? Efectivamente, al menos alguno de sus factores debe ser igual a 0. Entonces podemos escribir que

$x = 0$ o $x - 10 = 0$ *(resolviendo la segunda ecuación)*

$x = 0$ o $x = 10$

Estas son las dos soluciones de la ecuación planteada. ¿Cuál crees que es la solución del problema, ambas, $x = 0$ o $x = 10$? En una puesta en común, discutan la respuesta a esta pregunta, basándose en sus conocimientos y comprobando el resultado.

A partir de tu respuesta anterior, calcula también la medida de la base del triángulo. ¿Crees que siempre se podrán resolver estas ecuaciones cuadráticas así?

Efectivamente, las ecuaciones de este tipo las reconocemos porque tienen la forma $ax^2 + bx = 0$, donde a y b son números cualesquiera distintos de 0. Siempre se resuelven de la misma manera: igualamos uno de los miembros de la ecuación a 0, factorizamos por x, igualamos ambos factores a 0 y luego resolvemos la ecuación lineal que resultó del paso anterior. Hagamos algunos ejemplos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $x(x+5) = 2x(x-4)$

SOLUCIÓN

Procedimiento:

$x(x+5) = 2x(x-4)$ *(resolviendo los paréntesis)*

$x^2 + 5x = 2x^2 - 8x \quad / -2x^2 + 8x$

$-x^2 + 13x = 0$ *(factorizando por x)*

$x(-x + 13) = 0$ *(igualando cada factor a 0)*

$x = 0$ o $-x + 13 = 0$ *(resolviendo la última ecuación)*

$x = 0$ o $x = 13$

Nota que esta ecuación tiene dos soluciones. Y una de ellas es 0. Como siempre es posible factorizar por x en este caso, una de las soluciones siempre será 0. Además, nota que este tipo de ecuaciones siempre tiene solución.

2. Don Martín, que es un muy buen carpintero, acaba de comprar el terreno donde construirá su casa. Él quiere hacer un cuarto en el patio que le sirva como taller para poder confeccionar sus muebles. Para ello destinó un terreno rectangular de 21 m^2, pero el largo de su taller debe ser 4 m más largo que su ancho. ¿Puedes decirle a Don Martín cuáles deben ser las medidas de su taller?

SOLUCIÓN

Procedimiento: En la figura 2.4 se presenta un bosquejo del taller de Don Martín.

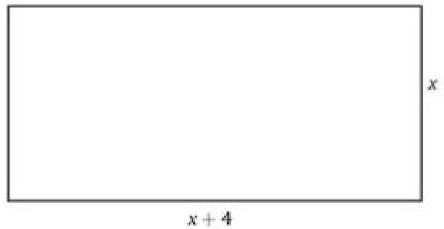


Figura 2.4

Entonces, podemos escribir que:

$x(x+4)=21$

$x^2+4x=21\ /-21$

$x^2+4x-21=0$ *(factorizando)*

Ahora bien, ¿es este tipo de ecuación una ecuación cuadrática? ¿Es de los tipos que ya has estudiado?

Sí, es una ecuación cuadrática, pues una de sus incógnitas está elevada a dos, sin embargo, esta ecuación es de la forma $ax^2+bx+c=0$, es decir, contiene términos de factor literal x^2, x y un número (sin factor literal). ¿Cómo la podremos resolver?

Pensemos en la herramienta que usamos anteriormente... la factorización. ¿Se podrá factorizar el lado de la ecuación que contiene el trinomio? Recuerden que para factorizar este tipo de trinomios buscamos dos números que multiplicados den por resultado -21 y sumados den 4.

Resuélvela individualmente y luego reúnete con otro compañero, argumentando a favor del procedimiento utilizado y la solución obtenida. Asimismo, comprueben esta solución en el problema, determinando las medidas del largo y del ancho del taller de don Martín.

Con la ayuda de tu maestra o maestro verifica tus respuestas.

Y para finalizar...

Reúnete con dos compañeros más y realicen la siguiente actividad.

Si desarmamos las piezas que forman el marco de una fotografía y las colocamos como muestra la figura 2.5, se forma un rectángulo de área 64 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se forma?, ¿cuáles son las medidas del largo y del ancho de la fotografía, incluido su marco?

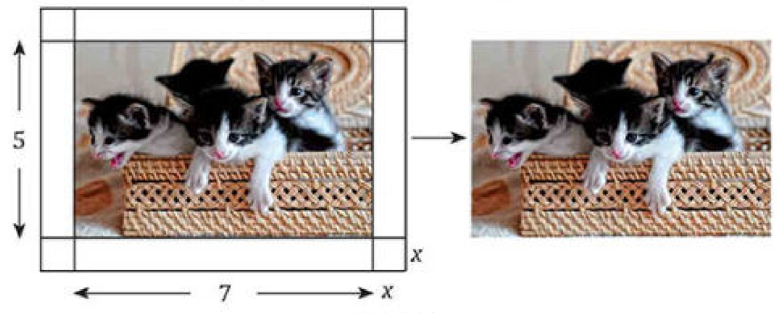


Figura 2.5

Luego, de determinada la solución compartan con el resto del curso, explicando y argumentando su resultado.

Comprueba tus conocimientos Tema 1

I. Completa cada afirmación según corresponda.

1 La ecuación $2x^2=5x$ tiene dos soluciones que son ____________________.

2 Los números 0 y 9 son soluciones de la ecuación cuadrática __________________.

3 La ecuación cuadrática $4x^2+28x+49=0$ tiene __________________ solución(es).

4 Una de las soluciones de la ecuación

$x^2+\frac{b}{a}x=0$ es siempre ______________.

5 Las ecuaciones del tipo $ax^2+bx+c=0$, cuando el lado izquierdo de esta se puede factorizar, son siempre ______________ o __________________ números reales.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas y comprueba la(s) solución(es) obtenida(s):

a. $5x^2-41x=0$

b. $\frac{9x}{2x^2}=2$

c. $\frac{x^2+4}{(x-3)(x-5)}=\frac{4}{15}$

d. $(2y-1)(y-2)-(1-2y)(y+2)=4y$

e. $x^2-14x+45=0$

f. $z(z+4)-96=0$

g. $(x+13)^2-(x-12)^2=(x-5)^2$

h. $3x^2+21x-30=0$ Indicación: Factoriza previamente por 3 y luego divide ambos miembros por este mismo número.

i. $\frac{y^2+56}{y}=15$

j. $p(p-2)=2(p+6)$

k. $(n-4)^2=16(4-n)$

l. $m(m-5)=4(m-2)+30$

m. $\frac{4a-3}{a+12}=a-4$

2 Hay un número n, distinto de cero, tal que al sumarle 7 por un lado y 9 por otro, se forman dos nuevos números cuyo producto es 63.

a. ¿Cuál es dicho número n?

b. ¿Qué relación encuentras entre 7, 9 y n?

c. Inventa un ejercicio similar a este y da la respuesta correcta.

3 En la figura 2.6, los triángulos ABD y ECD son semejantes:

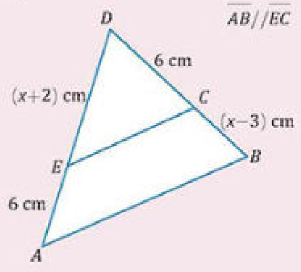


Figura 2.6

a. Escribe una ecuación para calcular el valor de x con la información dada.

b. Resuelve la ecuación y calcula el valor de x.

III. Resuelve con tu grupo los siguientes problemas:

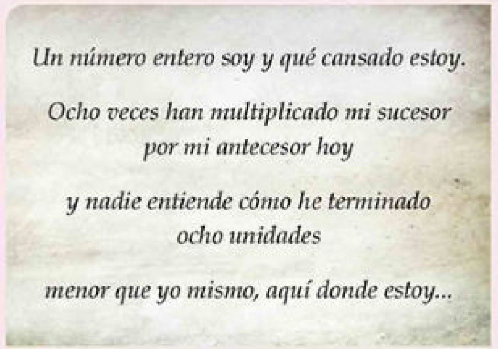
1 ¿Por qué discuten tanto sobre cómo fabricar esa maceta que les pido para mi invernadero? –les grita la abuela de Josefa, a ella y su hermana–. Es que no nos ponemos de acuerdo. Abuela tu nos has dicho que la base debe ser rectangular de modo que el largo de ella tenga 30 cm más que su ancho –replica la hermana de Josefa– .Y que además su altura sea de 20 cm –continua la abuela–. Lo que pasa es que Josefa insiste en que debe contener exactamente los 360 dm^3 de tierra que, según ella, tú necesitas. ¿Es verdad esto? Así es –replica la abuela.

Conforme al relato:

a. Escribe una ecuación que permita obtener el largo de la base y, donde la incógnita lo represente.

b. ¿En cuántos cm supera el largo al alto?

2 El profesor de Lenguaje de Macarena le pidió como tarea que hiciera un poema que tuviera rima e integrara las asignaturas de Lenguaje y Matemáticas. A Macarena le gustaban los desafíos, así que después de un rato escribió:



a. Escribe una ecuación que permita obtener el entero aludido en la rima.

b. ¿A qué número se refiere Macarena en su poema?

3 A veces dudo que Octavio diga la verdad ya que es muy misterioso. Según él le gusta coleccionar solo monedas y que sean de $ 5. Él guarda siempre la misma cantidad de dinero en cada una de las bolsas que tiene destinadas para ello. Un día le pregunté: –Octavio, ¿cuántas monedas tienes por bolsa? –Seguramente tú piensas que tengo el mismo número de bolsas que de monedas. –Te ayudaré diciendo que debes considerar x al número de bolsas y x al número de monedas", luego te menciono que debes disminuir en cincuenta el número de bolsas y disminuir en treinta, el número de monedas. –Entonces ¿cuánto dinero tienes en total? –¡Siete mil quinientos pesos!

Conforme al relato:

a. Escribe una expresión que simbolice el número de monedas que hay en cada bolsa.

b. ¿Cómo interpretas cada término de la ecuación $(x-50)(x-30)\cdot 5 = 7\,500$?

c. Identifica qué tipo de ecuación de segundo grado corresponde la expresión reducida de la ecuación anterior. ¿Por qué?

d. Encuentra el valor de x.

e. ¿Cuántas bolsas tiene Octavio? ¿Por qué?

f. Responde a la pregunta con que se inicia el dialogo.

4 Los triángulos de la figura 2.7 son semejantes, determina el valor de y

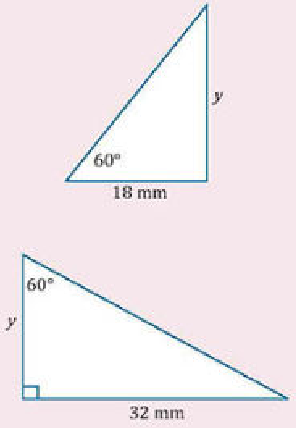


Figura 2.7

5 Con los datos de la figura 2.8, calcula la medida de los lados del rectángulo si se sabe que su área es igual a 8 cm^2

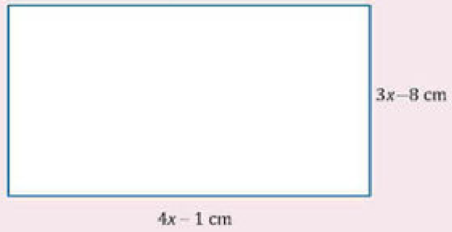


Figura 2.8

6 En un libro de física, José leyó que cuando una bala se lanza verticalmente hacia arriba sucede que t segundos después la distancia, en pies, entre la bala y el punto de lanzamiento es $-16t^2 + v_0 t$, expresión en la que v_0 es la medida inicial de la bala, medida en pies por segundo. Escribe, para cada uno de los siguientes casos, las ecuaciones que expresen lo que se indica:

a. La velocidad inicial de la bala es de 64 pies por segundo y t segundos después del momento del lanzamiento de la bala está a 48 pies del punto inicial.

b. La velocidad inicial de la bala es de 64 pies por segundo y t segundos después del momento del lanzamiento de la bala está a 64 pies del punto inicial.

c. La velocidad inicial de la bala es de 32 pies por segundo y t segundos después del momento del lanzamiento de la bala está a 16 pies del punto inicial.

d. La velocidad inicial de la bala es de 96 pies por segundo y t segundos después del momento del lanzamiento de la bala está a 144 pies del punto inicial.

7 De las ecuaciones del ejercicio anterior, tres pueden escribirse de modo que el lado derecho sea cero y el izquierdo sea un binomio al cuadrado. Antes de reescribirlas de esta manera, divide cada lado de la ecuación por 16, para obtener una ecuación equivalente a la original.

8 El resto de las ecuaciones del ejercicio original puede escribirse de modo que el lado derecho sea cero y el izquierdo una multiplicación de binomios con un término común. Escríbelas de esta manera.

9 Después de realizar los dos ejercicios anteriores contesta lo siguiente:

a. ¿Qué ecuaciones del ejercicio original tienen solución única? ¿Cuál es, en cada caso, dicha solución?

b. ¿Qué ecuaciones del ejercicio original tienen dos soluciones? ¿Cuáles son, cada caso, dichas soluciones?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Sé distinguir los dos nuevos tipos de ecuaciones cuadráticas estudiados en este tema.			
Entendí los ejercicios resueltos en el libro.			
Desarrollé correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un cuadro resumen que incluya la manera de resolver este tipo de ecuaciones y dos ejemplos resueltos sobre ellas.

Figuras y cuerpos

Estudiarás en este tema

- Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
- Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Observa las siguientes imágenes:




Y para comenzar...

- En las tres imágenes en que el objeto se refleja en el agua ¿la imagen y su reflejo tienen la misma longitud y anchura?
- En la imagen de la figura abstracta, ¿la mitad izquierda de esta, es igual en tamaño a su mitad derecha?
- Si cada una de las imágenes se superponen con su reflejo, ¿coinciden?
- ¿Qué hay que hacer para que coincidan?

Realiza individualmente la siguiente actividad:

- Dobla un papel por la mitad y desdóblalo; con ayuda de una regla colorea el doblez. Luego escribe la palabra EJE sobre al mismo.
- En una de las mitades de este papel, o semiplano, dibuja un cuadrilátero cuyos vértices se nombrarán como A, B, C y D.
- Dobla de nuevo el papel y con la ayuda de un alfiler perfora los vértices ya trazados, atravesando la otra mitad del papel.
- Desdóblalo y dibuja con los cuatro puntos otro cuadrilátero en esta mitad. Los vértices de esta nueva figura se nombrarán como A', B', C' y D', teniendo en cuenta que las letras estén en la misma posición en ambas. Observa la figura 2.9:

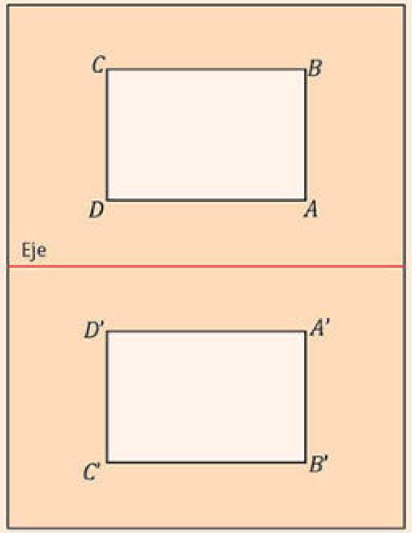


Figura 2.9

- ¿Cómo son estos cuadriláteros? ¿Cómo son las medidas del nuevo cuadrilátero, con respecto al cuadrilátero original?
- Con ayuda de una regla, une los vértices respectivos de los cuadriláteros: A con A', B con B', C con C' y D con D'.
- Mide la distancia entre A y el eje y luego entre A' y el eje. ¿Qué puedes decir con respecto a las distancias antes medidas? Realiza lo mismo con los demás vértices, ¿qué ocurre?
- Reúnete ahora con un compañero, discutan sus resultados y respondan: ¿qué nombre recibe este tipo de figuras?

Es importante que domines los contenidos sobre simetría axial (o con respecto a una recta dada) y que comprendas que se trata de una transformación de una figura en otra, de manera tal que todos los puntos de la primera figura se reflejen con respecto a la recta en los puntos correspondientes (u homólogos) de la segunda. Este concepto te será muy útil para entender los nuevos temas que se tratarán, ampliando tus conocimientos a simetrías centrales y además introduciendo los nuevos conocimientos sobre rotaciones y traslaciones.

Rotación de figuras

–Un poco más arriba, papá, el cuadro no se ve derecho.

–¿Está bien así?

–Muy arriba, ahorita un poco más abajo.

Después de muchos intentos, el cuadro por fin quedó bien.

- Dime tú, ¿qué tendrá que ver este relato con el título de esta sección?
- ¿Qué es para ti una rotación?, ¿cambiará el cuadro sus características cuando se rote?

Así como cotidianamente entendemos rotar como un sinónimo de girar, lo hacemos también en matemáticas. Cuando giramos o rotamos alguna figura, debemos definir el punto sobre el que se rotará (punto que puede estar fuera o dentro de la figura) y el ángulo de rotación (si es positivo, se medirá en sentido antihorario, y si es negativo, en sentido horario)

Supongamos que tenemos la figura 2.10, que debe ser rotada en un ángulo de 65° en torno al punto *M*:

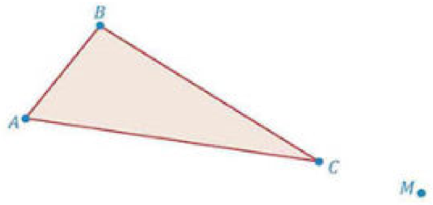


Figura 2.10

Recuerda y registra...

En geometría, los ángulos y arcos tienen un sentido de giro, sentido horario o sentido antihorario, de lo que depende que sean considerados positivos o negativos. Si estos se miden en la dirección opuesta a las manecillas del reloj, su signo será positivo, mientras que su medida en el mismo sentido de las manecillas del reloj es negativa.

Rotaremos cada uno de los vértices. Comencemos con el vértice *C*. Para ello se une *M* con *C* y sobre este trazo se construye un ángulo de igual medida al deseado en la rotación. En nuestro ejemplo, de 65°, como se indica en la figura 2.11.

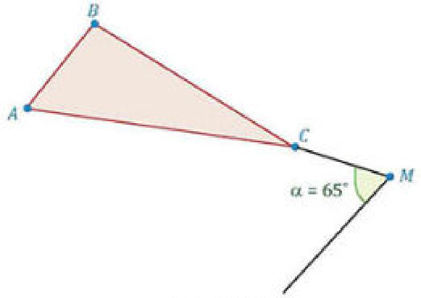


Figura 2.11

Con compás se mide la distancia de *C* a *M* y desde *M* (con centro en *M*) se copia esta distancia en el lado del ángulo trazado, determinando el punto *C'*, que será el rotado de *C*, como se muestra en la figura 2.12.

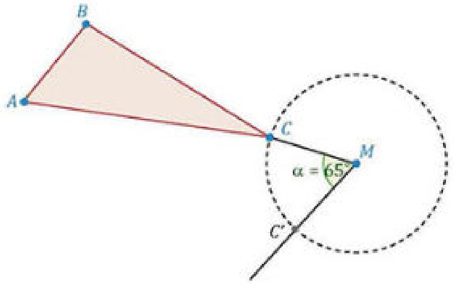


Figura 2.12

Así, si lo hacemos con todos los vértices, obtendremos el triángulo rotado de la figura 2.13.

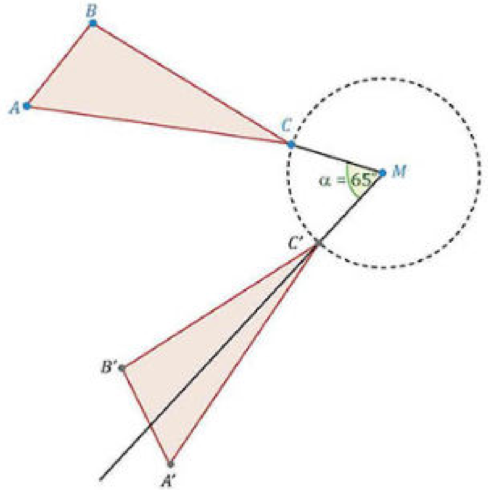


Figura 2.13

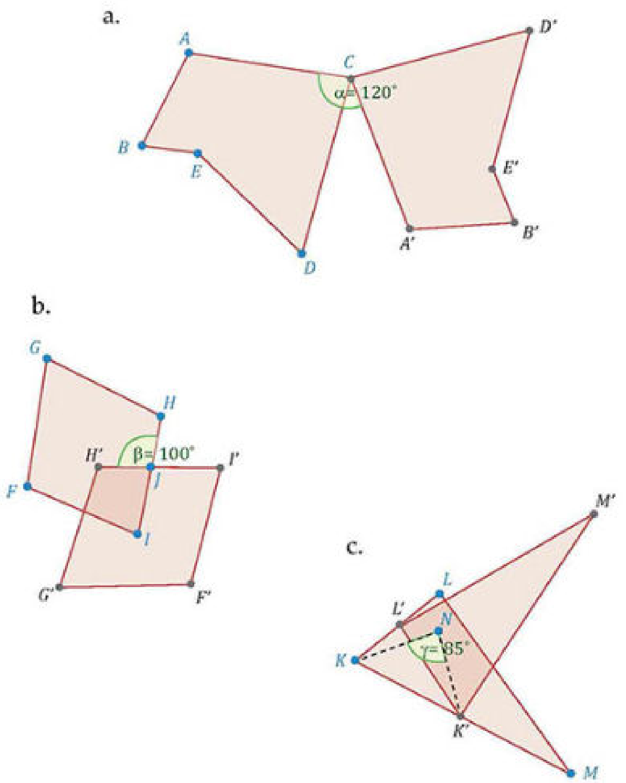
Te toca a ti. Dibuja una figura y un punto (en el que se rotará la figura) cualquiera y define un ángulo de rotación. Rota la figura siguiendo los pasos que aprendiste.

Luego, reúnete con dos compañeros y expongan sus figuras, discutiendo y validando sus procedimientos. Si aún no tienes claro como se realizan las rotaciones, pide a alguno de tus compañeros que te explique detalladamente cada paso.

Entonces, definimos *Rotación* como la acción de girar una figura en cierto ángulo, llamado ***ángulo de rotación***, y con respecto a un punto del plano, llamado ***centro de rotación***.

- ¿Qué pasaría si el centro de rotación se encuentra en la figura?

Analicemos las siguientes rotaciones:



Figuras 2.14: a. Pentágono, **b.** Cuadrilátero, **c.** Triángulo.

Analicemos la figura 2.14a del pentágono. ¿Cuál es su centro y ángulo de rotación? Efectivamente, su centro de rotación es el punto C y su ángulo de rotación 120° (ángulo que forma C como vértice con las rectas que contienen al punto A y al rotado A'). Aquí el centro de rotación es un vértice de la figura.

Con el cuadrilátero de la figura 2.14b, el centro de rotación es el punto J y el ángulo de rotación es de 100°. Aquí el centro de rotación se encuentra en uno de los lados de la figura.

Por último, en el triángulo figura 2.14c, el centro de rotación está dentro de la figura y es N, y el ángulo de rotación es de 85°. No olvides que para rotar K, por ejemplo, se debió unir N con K para luego medir sobre el trazo $\overline{NK}$ el ángulo de rotación.

¿Cómo son ambas figuras, iguales, proporcionales, etc.? ¿Qué nombre reciben estas figuras?

Luego de tu reflexión, pide a tu maestra o maestro que te indique el nombre que reciben estas figuras y compáralo con tus apreciaciones.

Traslación de figuras

–No, hija, no me sirve que ese jarrón esté en esa esquina. Ayúdame a trasladarlo a esta otra.

–Ok, mamá, pero está muy pesado, así que lo moveré primero derecho hacia arriba y luego hacia el lado, ¿te parece?

–Me parece muy bien, hija, espera que yo te ayudo.

- ¿Me puedes decir qué es trasladar para ti? ¿Qué movimientos empleó la hija para llevar el jarrón donde su mamá quería?
- ¿Cambió el jarrón alguna de sus características con este movimiento?

Trasladar objetos es algo que hacemos a diario. Sin ir más allá, nosotros mismos nos trasladamos de un lugar a otro muchas veces al día. En matemáticas también puedes definir el concepto de *Traslación* de una figura. Para ello debes tener en cuenta el punto de partida de la figura original y también el movimiento que quieres hacer. ¿Te acuerdas qué determinaba un movimiento en física?

Efectivamente, cuando se produce un movimiento en el plano, por ejemplo el de una hormiga en un papel, este queda determinado por completo cuando se da su sentido, magnitud y dirección. Es decir, cuando se hace a través de un vector.

En matemáticas lo haremos de la misma manera. Para definir una traslación, debemos dar la figura por trasladar y el vector en el que queremos trasladarla. Mira el siguiente ejemplo de la figura 2.15:

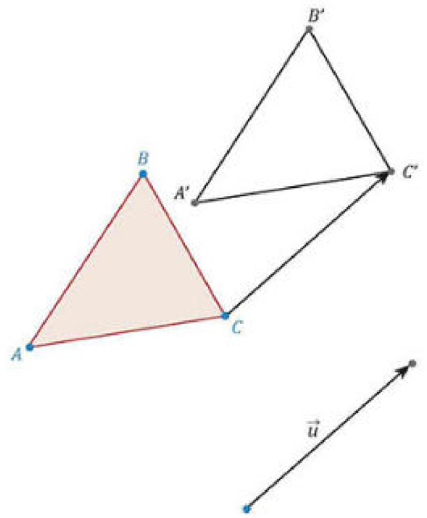


Figura 2.15

Vector: herramienta geométrica que se utiliza para representar una magnitud física en la que, además de su valor, hay que considerar el punto de aplicación, su dirección y sentido.

Si te fijas, dado el triángulo ABC y el vector de traslación $\vec{u}$, cada uno de los vértices se trasladó (o desplazó) en dicho vector. Pero ¿cómo se realiza esto geométricamente?

Primero: En el vector $\vec{u}$ traza una línea desde su inicio y mide el ángulo formado (dirección), indicado en la figura 2.16.

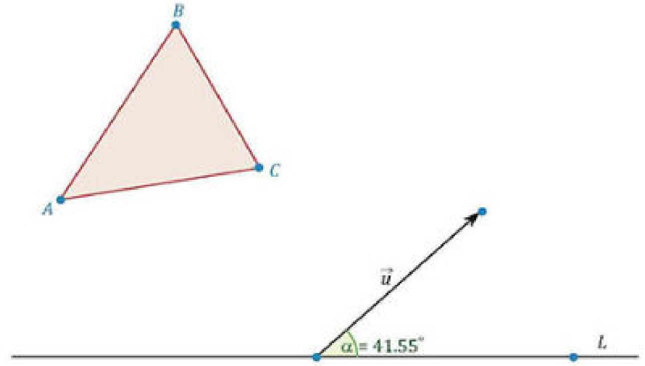


Figura 2.16

Segundo: Se traza por C una paralela a la recta L, que llamaremos G, y se copia el ángulo determinado en el vector, figura 2.17.

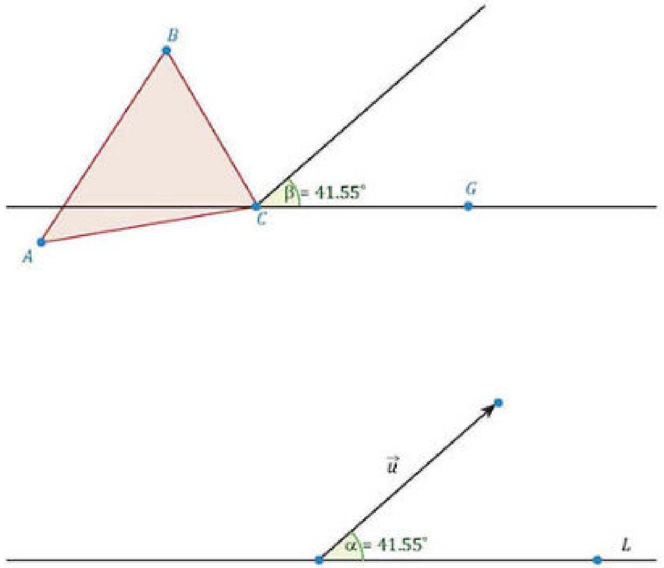


Figura 2.17

Tercero: Se mide con un compás la magnitud del vector dado ($\vec{u}$) y se copia desde C sobre el lado del ángulo determinado. Este punto será el trasladado de C, correspondiente a C', como se observa en la figura 2.18.

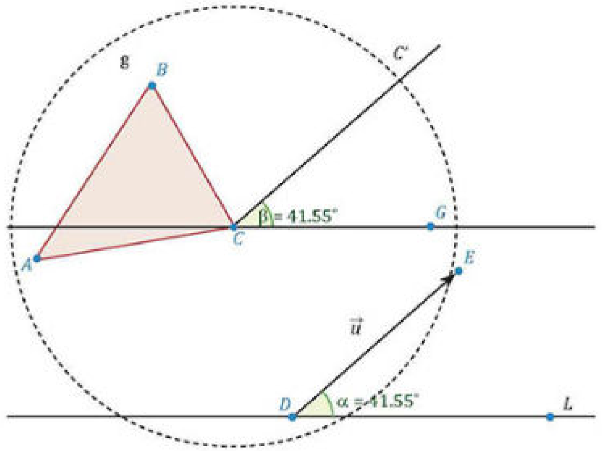


Figura 2.18

Así lo puedes hacer con cada uno de los vértices. Prueba ahora hacerlo tú solo o sola. Construye un cuadrilátero y dibuja un vector cualquiera, luego traslada el cuadrilátero en el vector construido, como acabas de aprender.

Existe también otra manera de realizar una traslación: por medio de la construcción de un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa el vector dado ($\vec{u}$), de manera que podamos descomponer el desplazamiento final (oblicuo) en dos desplazamientos consecutivos, uno vertical y otro horizontal (como lo hicieron madre e hija con el jarrón).

Primero: Dibujar un triángulo rectángulo, como el de la figura 2.19, en el vector $\vec{u}$, nombrando G al punto en el cual se corten las rectas perpendiculares del triángulo recién construido.

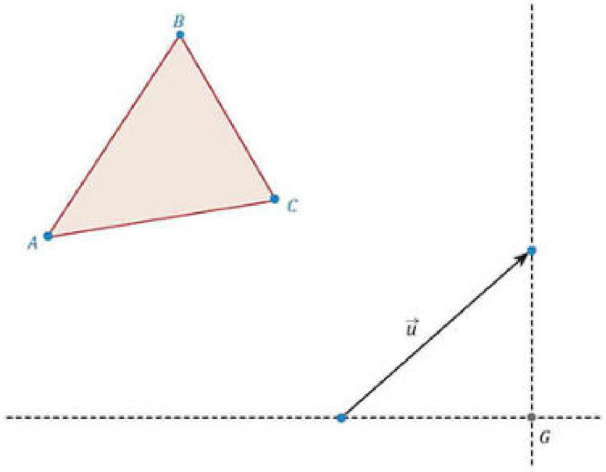


Figura 2.19

Hipotenusa: lado opuesto al ángulo recto (o de **90°**) de un triángulo rectángulo.

Segundo: Trazar una paralela al cateto horizontal del triángulo recién construido ($\overline{DG}$) que pase por el vértice C del triángulo original ABC, medir la longitud de este cateto y determinar G', como en la figura 2.20.

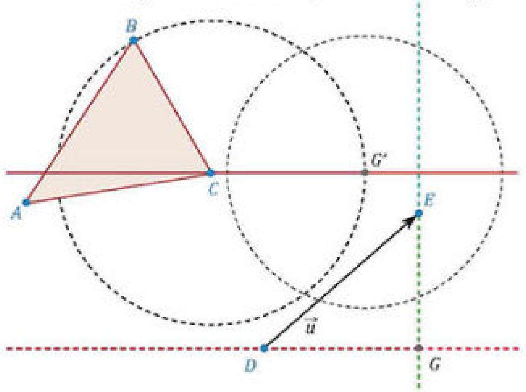


Figura 2.20

Tercero: Por este último punto, trazar una perpendicular a la recta paralela dibujada ($\overleftrightarrow{CG'}$). Luego medir el otro cateto (es decir, $\overline{GE}$) y determinar así C'. Luego se procede de la misma manera con los demás vértices del triángulo ABC (figura 2.21).

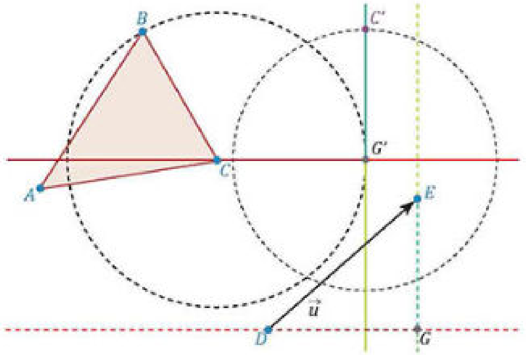


Figura 2.21

Según lo que has podido apreciar, ¿las traslaciones modifican la forma, el tamaño de las figuras o alguna de sus características? En una puesta en común, elijan a un compañero que explique este hecho.

En las siguientes páginas web puedes aprender más sobre traslaciones. Recuperadas, enero 29, 2013, de:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/translaciones.html
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_3eso_movimientos_plano/3eso_quincena7.pdf

También en la siguiente página web podrás analizar rotaciones y traslaciones de paralelogramos y triángulos. Recuperada, noviembre 04, 2013, de:
http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Transform/Index.html

Cateto: cada uno de los dos lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Construcción de diseños a partir de transformaciones

En la visita de Raúl y Consuelo a la exposición fotográfica, Raúl se sorprendió con las fotografías ahí expuestas.

–¡Consuelo, ven acá! Mira esta fotografía, ¡qué bella! ¿Sabías tú que también hay aquí presente una simetría?

–¿Simetría, pero cómo?

- ¿Qué piensas tú?, ¿podrá ser cierto lo que dice Raúl?, ¿es de alguna manera simétrica la figura?, ¿qué debe suceder con los puntos de una figura para que esta sea la simétrica de otra?

Efectivamente, esta figura es simétrica. Si te fijas bien, ya no con respecto a una recta, sino al unir cada uno de los puntos de uno de los delfines con su correspondiente punto en el segundo: ellos forman rectas que se cortan en un mismo punto. Y además, porque ese punto divide a los trazos mencionados en dos partes de igual longitud. Este es el mismo principio de la simetría axial (o respecto a un eje). A este tipo de simetría se le llama ***Simetría central (o puntual)***.

Para construir una figura simétrica con respecto a un punto (o una simetría central) se deben dar una figura y el centro de simetría (un punto en el plano). Luego trazar una recta que pase por cada vértice de la figura y por el centro de simetría. Se mide (con compás) la distancia entre el vértice de la figura original y el centro de simetría y luego se copia esa medida desde dicho centro sobre la recta trazada. El punto obtenido será el simétrico del original.

Simetría: correspondencia entre los puntos del plano o del espacio en relación con un centro, un eje o un plano.

Por ejemplo, dada la figura 2.22 y el punto *A*, encontremos su simétrica.

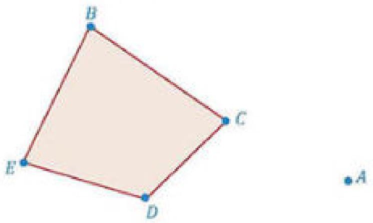


Figura 2.22

Hagamos lo señalado para el vértice *C*, como se indica en la figura 2.23.

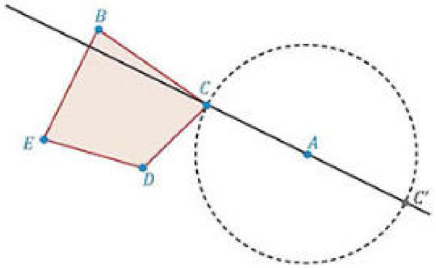


Figura 2.23

Ahora, completemos la figura haciendo lo mismo para los otros vértices (figura 2.24).

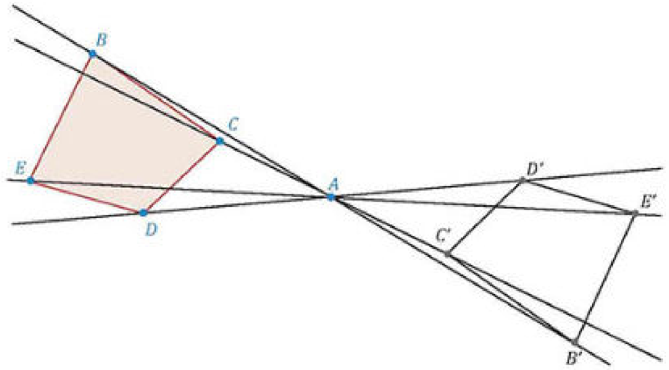


Figura 2.24

Así como en las simetrías con respecto a un eje las figuras conservaban su forma y tamaño y las propiedades que estas tenían, en una simetría central pasa lo mismo. Por lo tanto, ¿qué tipo de figuras estudiadas en el bloque anterior puedes obtener haciendo simetrías?

Muy bien pensado. Cada vez que realizas una simetría axial o central obtendrás dos figuras congruentes.

Ahora piensa y responde. Así como hay figuras que tienen ejes de simetría propios, ¿habrá figuras que tengan centros de simetría propios, es decir, en el interior de la figura?

Efectivamente. Miremos el cuadrado de la figura 2.25:

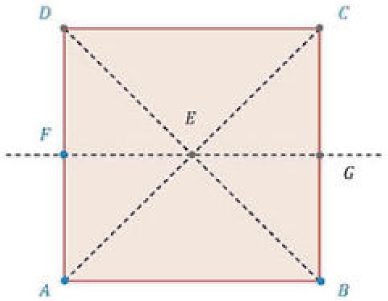


Figura 2.25

Si te fijas bien, el punto de intersección de las diagonales del cuadrado (que es también su centro de gravedad, punto de equilibrio de la figura) es centro de simetría interna, por lo tanto, todos los cuadrados tienen un centro de simetría. En este caso no se forman dos cuadrados congruentes, sin embargo, los triángulos *DEC* y *AEB* son simétricos (y por tanto congruentes) con respecto al centro de simetría *E*.

Si quieres saber más sobre los centros de gravedad de una figura, puedes visitar las siguientes páginas web.
Recuperadas, enero 28, 2013, de:
http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/centro-gravedad-centroide/centro-gravedad-centroide.pdf
http://industriales.utu.edu.uy/interfis/images/stories/experimento_centro_de_gravedad.pdf

- ¿Todos los centros de gravedad de una figura geométrica serán también centros de simetría?

No. Observa esto:

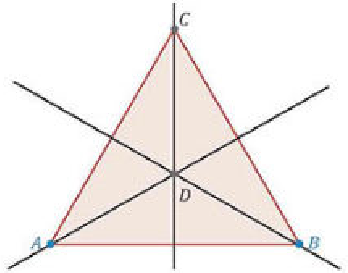
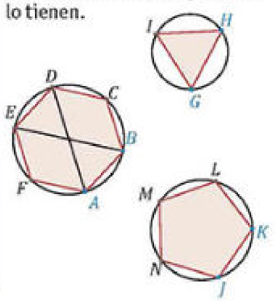


Figura 2.26

En el triángulo *ABC* de la figura 2.26, *D* es el centro de gravedad del triángulo, sin embargo, no es centro de simetría del triángulo. Si miras bien, el punto *C*, por ejemplo, no tiene su simétrico en el triángulo.

Más que...

Todos los polígonos regulares, de número par de vértices tienen centros de simetría internos, que son el centro de la circunferencia circunscrita a ellos. En cambio, los de número de vértices impares no lo tienen.



Centro de gravedad: en un triángulo es el punto donde se cortan las transversales de gravedad.

A

Habilidades a desarrollar: dibujar – aplicar.

1 Dibuja dos objetos que tengan centros de simetría en su interior.

2 Dibuja un objeto y un punto fuera de él y encuentra su simétrico con respecto al punto dibujado.

La simetría central, al igual que la simetría axial, la rotación y la traslación, corresponden a las llamadas *Transformaciones isométricas*, que son aquellas que no alteran el tamaño ni la forma de una figura. Solo involucran un cambio en la posición o ubicación de esta, resultando que la figura inicial y la final son semejantes y geométricamente congruentes.

Para repasar este contenido puedes consultar el siguiente link sobre rotaciones, simetrías y traslaciones. Recuperado, enero 30, 2013, de: *http://www.slideshare.net/jaguayo/transformaciones-isomtricas-14812*

Más que...

La figura que se obtiene después de realizada una transformación es la imagen de la figura original a través de la operación descrita (rotación, traslación o simetría).

Si combinamos una o más transformaciones isométricas, podemos formar diversos diseños llamados *Teselaciones* o embaldosados que cubren completamente una superficie. Distintas culturas a través del tiempo utilizaron esta técnica para cubrir pavimentos o formar muros de mosaicos en palacios y catedrales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada las figura 2.27, determina la transformación aplicada (rotación, traslación o simetría), así como los trazos pedidos en cada caso:

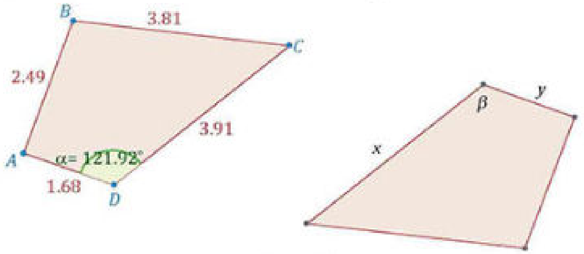


Figura 2.27

SOLUCIÓN

Procedimiento: Si te fijas bien, está rotada, pero también se podría ver como una simetría central. Si lo pensamos de esta última forma, una manera fácil de buscar el centro de simetría es unir los pares de vértices homólogos. La intersección de estos trazos será el centro de simetría. Observa la figura 2.28.

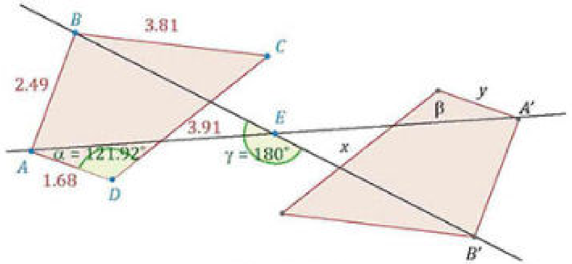


Figura 2.28

Si miras con detención, E es el centro de simetría de los cuadriláteros. Como son congruentes, sus lados homólogos son de la misma medida, así como también sus ángulos homólogos. Por lo tanto, el valor de los lados y ángulo pedidos son: $x = 3.91$, $y = 1.68$ y $\beta = 121.92°$. Ahora piensa en una rotación. El centro de rotación sigue siendo el punto E y el ángulo de rotación será de 180°. Entonces, ¿una simetría central siempre es una rotación?

Efectivamente, una simetría central siempre es una rotación en 180°, donde el centro de rotación es el centro de simetría.

Sabías que...

Muchos artistas hacen uso de estas teselaciones en su trabajo. Uno de los más destacados es M. C. Escher. El artista holandés se divirtió teselando el plano con figuras de intrincadas formas, que recuerdan pájaros, peces, animales, etcétera.

2. Dada la figura 2.29, determina la transformación aplicada.

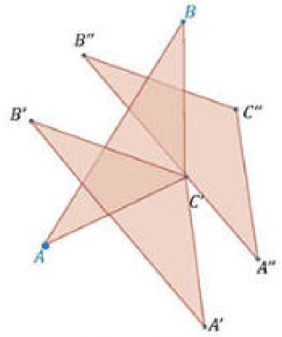


Figura 2.29

El $\triangle ABC$ se ha transformado primero en el $\triangle A'B'C'$ y luego este en el $\triangle A''B''C''$.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Del triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$ se hizo una rotación y luego de este último al triángulo $A''B''C''$, una traslación. Observa la figura 2.30.

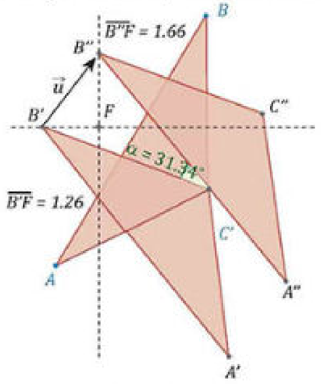


Figura 2.30

Entonces, la rotación se realizó con centro en C (punto fijo del triángulo ABC) y con ángulo de 31.34° (se mide el ángulo que forman los trazos que contienen a B y B', con vértice en C). Para la traslación se medirá el vector que une dos vértices homólogos (como se marca en la figura entre B y B'). También podríamos decir que el triángulo $A'B'C'$ se trasladó 1.26 unidades horizontalmente hacia la derecha y 1.66 unidades verticalmente hacia arriba.

3. Orlando observó en un ejemplo del libro de Matemáticas la figura 2.31 que representa un dibujo elaborado por un artista. En él se han realizado distintas transformaciones isométricas. Como él ya estudió los distintos tipos de transformaciones que se pueden realizar, se propone determinar cuáles se han llevado a cabo. Ayúdalo tú en esta tarea.

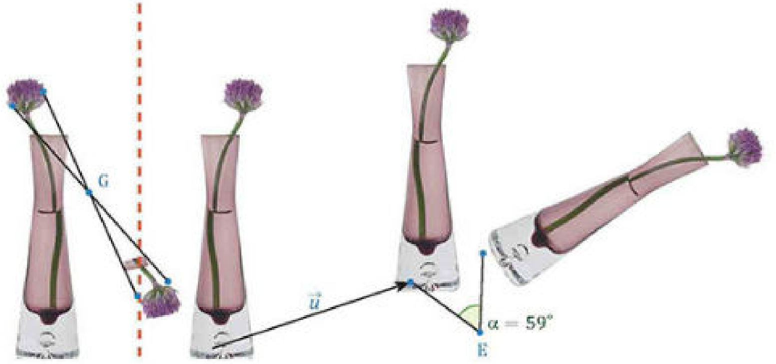


Figura 2.31

SOLUCIÓN

Procedimiento: Te desafiamos a encontrar la solución de este ejercicio, a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Qué transformación isométrica se le aplicó al primer florero (de izquierda a derecha)? Explica detalladamente.
- ¿Qué le ocurrió a la flor de este florero? ¿Qué tipo de transformación isométrica se le hizo con respecto al punto *G*?
- ¿Qué tipo de transformación se le hizo al florero con respecto al vector azul $\vec{u}$?
- ¿En cuántos grados se ha rotado el último florero, con respecto al punto *E*?

En la siguiente página web podrás construir diseños que combinen la traslación, la simetría axial y central y la rotación de figuras geométricas. Recuperada, noviembre 04, 2013, de: *http://lite.org.mx/repositorio/portafolios/gis/02_gis/recursos/mat2/oda/2m_b05_t02_s01_descartes/Principal.html*

Y para finalizar...

Para finalizar, reúnete con dos compañeros más y realicen un diseño que contenga al menos una traslación, una rotación y una simetría central y una simetría axial. Al reverso, describe estas transformaciones matemáticamente (dando ángulos, centros de simetrías y de rotación, ejes, etcétera). Escojan a un representante de su grupo para que muestre y explique detalladamente cada paso realizado, así como el diseño realizado.

Comprueba tus conocimientos Tema 2

I. Coloca V (verdadero) o F (falso) frente a cada afirmación según corresponda.

1 ___ La rotación de una figura da por resultado otra figura congruente a la primera y, por lo tanto, con las mismas características y propiedades de ella.

2 ___ Todos los centros de gravedad de una figura geométrica se pueden considerar centros de simetría.

3 ___ Hay figuras geométricas que tienen sus propios ejes de simetría.

4 ___ Para trasladar una figura mediante una construcción geométrica se requiere solo copiar el vector correspondiente.

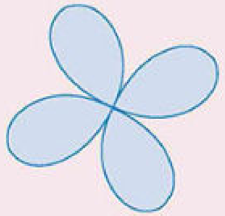
II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Para cada una de las siguientes formas de la figura 2.32, responde:

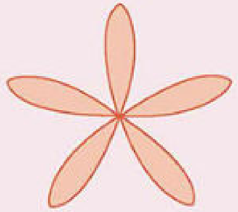
a. ¿Cuáles de ellas tienen simetría central en la figura?

b. Marca con rojo los centros de simetría en las que corresponde.

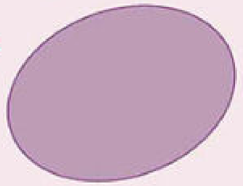
i.



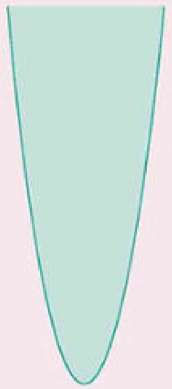
ii.



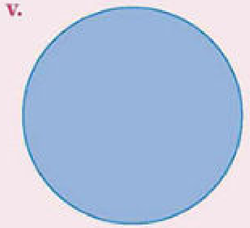
iii.



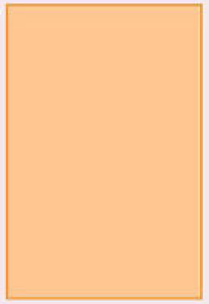
iv.



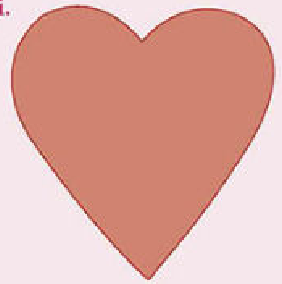
v.



vi.



vii.



viii.

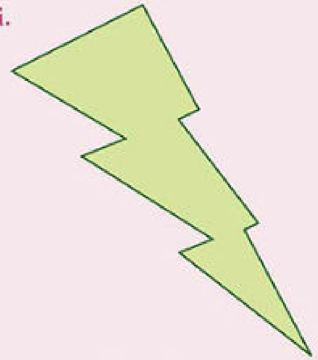


Figura 2.32

a. Ahora bien, refiriéndonos la figura ii. y eligiendo como centro de rotación el punto de intersección de todos los ejes de simetrías propios.

b. Indica el número mínimo de grados en que debe rotarse para que vuelva a ser congruente consigo misma en la posición en que se encontraba originalmente. Finalmente si se considera el punto más bajo de la figura v., como centro de rotación.

c. Menciona el número mínimo de grados en que debe rotarse para que vuelva a ser congruente consigo misma en la posición en que se encontraba originalmente.

3 En las figuras 2.33 a, b y c realiza lo pedido a continuación:

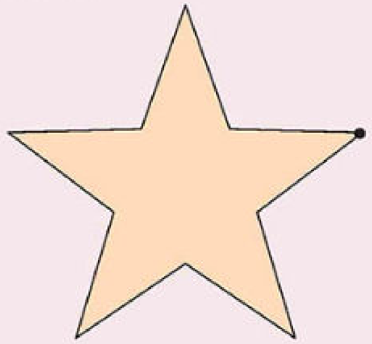


Figura 2.33 a

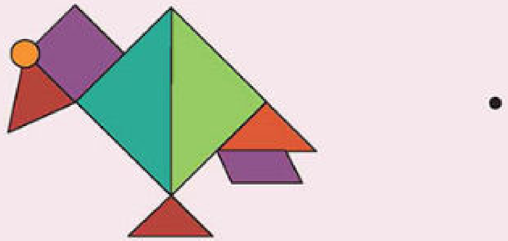


Figura 2.33 b

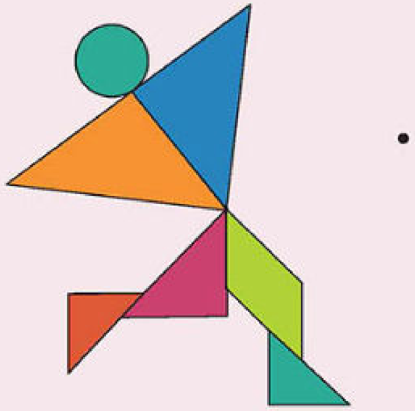


Figura 2.33 c

a. Indica cuántos vértices son necesarios para reflejar la figura con respecto al punto dado.

b. Construye la figura simétrica con respecto al punto dado.

c. Rota la figura con respecto al punto dado en un ángulo de 85°.

d. Usando esta figura realiza una traslación de ella indicando el vector de traslación.

4 La figura 2.34 muestra un rectángulo con una ecuación cuadrática y que debe ser trasladado conforme al vector dibujado en azul.

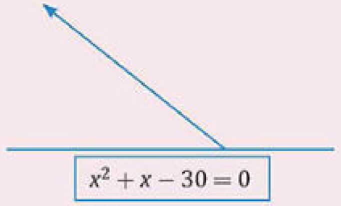


Figura 2.34

a. Efectúa dicha traslación.

b. Mide directamente el ángulo que forma este vector con la horizontal e indica los pasos que hay que realizar para hacer esta traslación copiando dicho ángulo.

Ahora bien

c. Resuelve dicha ecuación e interpreta así, los resultados: el valor mayor indica el número de unidades que debe desplazarse horizontalmente este rectángulo. Si es positivo, el desplazamiento es hacia la derecha. De lo contrario, es en sentido inverso.El valor menor, corresponde al número de unidades que debe desplazarse verticalmente. Si es positivo, el desplazamiento es hacia arriba. De lo contrario, en sentido inverso. Efectúa esta traslación y compara este resultado con el obtenido en **a.** ¿coinciden?, por qué?

5 El perímetro de cualquiera de las siguientes figuras que son congruentes, es 7.5 cm (figura 2.35).

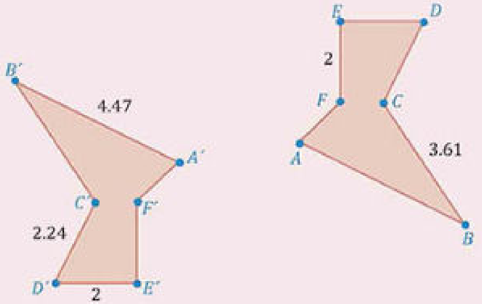


Figura 2.35

a. ¿Está una de ella rotada con respecto de la otra? ¿Por qué?

b. ¿Podrá ser la figura de la derecha la resultante de una simetría central de la otra? Justifica tu respuesta.

c. ¿Por qué ambas figuras no son traslaciones de una respecto de la otra?

d. Se aplica una transformación (rotación, traslación o simetría) a la figura de la izquierda y así se logra la otra (verde). A pesar de esta operación ¿es posible completar el valor de los lados de cada una de ellas? ¿Por qué?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
¿Puedo explicar qué es y cómo se construye una simetría central?			
¿Puedo explicar qué es y cómo se construye una traslación?			
¿Puedo explicar qué es y cómo se construye una rotación?			
¿Puedo explicar cómo se utilizan en la vida diaria estas transformaciones?			
¿Entendí los ejercicios resueltos en esta sección?			
¿Pude resolver correctamente los ejercicios propuestos?			
¿Cooperé con mis compañeros cuando tuve que trabajar en grupo?			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un esquema con los conceptos no adquiridos.

Medida

Estudiarás en este tema

- Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Lee el siguiente relato:

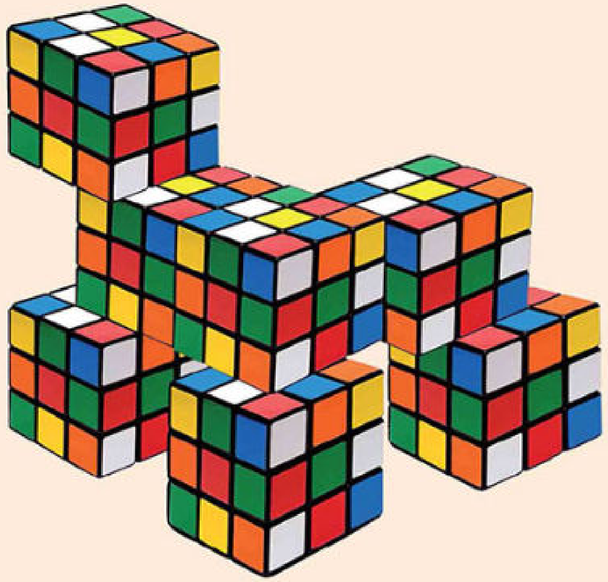
El conocido cubo de Rubik, es un rompecabezas mecánico y tridimensional inventado por el profesor de arquitectura y escultor húngaro Ernö Rubik en 1974. De este famoso rompecabezas se han vendido más de 350 millones de cubos en todo el mundo, haciéndolo el juego de rompecabezas más vendido del mundo.

En el cubo de Rubik clásico, cada una de las seis caras está cubierta por nueve adhesivos de seis colores uniformes (tradicionalmente rojo, blanco, amarillo, naranja, verde y azul). Un mecanismo de ejes permite a cada cara girar libremente, mezclando así los colores. Para resolver el rompecabezas, cada cara debe volver a consistir en un solo color.

Y para comenzar...

1. Si tenemos un cubo de Rubik, cuyas caras son todas iguales, y la medida del lado de cada cara es de 7 cm, determina la medida del área de cada cara.
2. ¿Cuál es la medida del área total del cubo mencionado anteriormente? Justifica.
3. ¿Cómo determinarías el área de cada adhesivo? Calcúlala, justificando cada paso realizado.

Te invitamos a transformarte en escultor realizando esta entretenida actividad. Para realizarla debes reunirte con dos compañeros y crear una escultura utilizando cubos de Rubik, para ello puedes basarte en la siguiente imagen:



- En primer lugar, deben diseñar la escultura que crearán, determinando la medida de los lados del cubo que utilizarán.
- Luego, deben elegir el material que usarán para su escultura, puede ser por ejemplo cartulina blanca y calcular cuántos metros de cartulina deben usar, para determinar el dinero que deben destinar para ello. Deben considerar que el pliego de cartulina blanca (66×47.5 cm) tiene un valor de \$5.
- A continuación, deben calcular el área total que tendrá su escultura para determinar cuánta pintura utilizarán en ella, y calcular el dinero total que deben destinar para esto. Para ello, consideren que 1 cubeta de pintura de 19 litros cuesta \$700, y que 1 litro de pintura alcanza para pintar 8 m^2.
- Si desean utilizar otro material u otra manera de colorear su escultura, deben determinar el precio de estos elementos, y calcular el dinero total que destinarán para ello.
- Finalmente, un representante del grupo debe presentar su escultura, explicando detalladamente cada paso realizado ante el resto de la clase.

Antes de comenzar este nuevo tema debes recordar tus conocimientos sobre áreas de figuras geométricas, pues te serán muy útiles para aprender las relaciones existentes entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, que es la base para comprender el teorema de Pitágoras, ampliamente utilizado no solo en matemáticas.

Analizando el triángulo rectángulo

Hoy iniciaremos este tema con un trabajo grupal. Para ello necesitarás plastilina de dos colores diferentes y un *cutter*. Sigue las instrucciones que a continuación se dan:

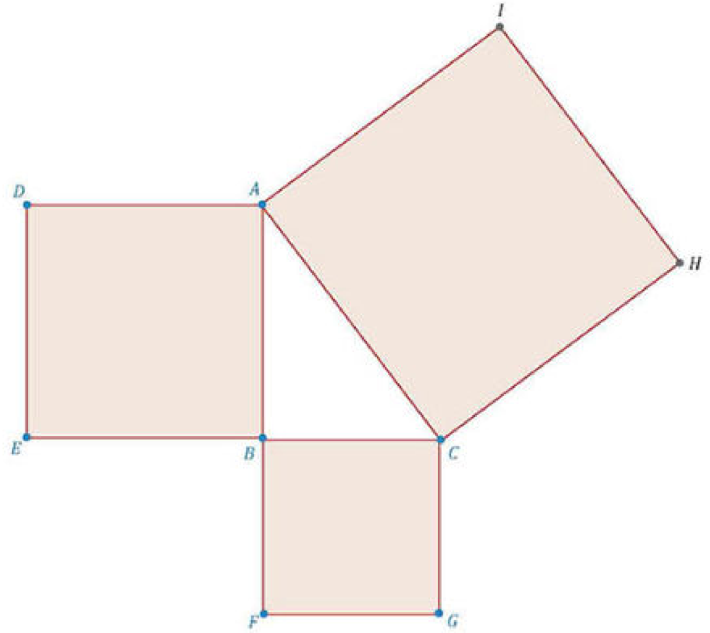


Figura 2.36

Instrucciones:

- Con una de las plastilinas, llena el cuadrado *BFGC* de la figura 2.36. Procura que quede justo, sin salirse de los bordes del cuadrado.
- Con la otra plastilina, llena el cuadrado *BADE*. Procura que no se salga de los bordes y que queden de una altura similar (solo para que sea más fácil tu trabajo).
- Con mucho cuidado y sin deformar los cuadrados que armaste con las plastilinas, coloca uno de ellos sobre el cuadrado *ACHI*, haciendo coincidir dos de sus lados. Con el otro cuadrado llena, cortando con el *cutter*, los espacios vacíos.

- ¿Se completó la superficie del cuadrado *ACHI* al llenarlo con la plastilina que llena el área de los cuadrados *ADEB* y *BFGC*?
- De acuerdo a lo observado, ¿es posible afirmar que la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños dibujados sobre los catetos del triángulo rectángulo (*ADEB* y *BFGC*), equivalen al área del cuadrado más grande dibujado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo (*ACHI*)?
- Construye un triángulo acutángulo y un triángulo obtusángulo y realiza la misma experiencia. ¿Qué puedes decir, esto ocurre solo en triángulos rectángulos o también ocurre lo mismo en otros triángulos?

Anota tus conclusiones.

Miremos la figura 2.37, en la cual se indica la medida de los lados del triángulo y las áreas correspondientes de los cuadrados:

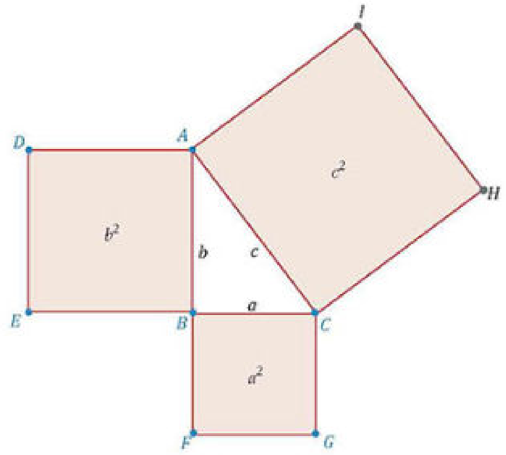


Figura 2.37

Algebraicamente, podemos anotar que: $a^2 + b^2 = c^2$ (esto es: la medida del cateto a al cuadrado más la medida del cateto b al cuadrado es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado, c).

Esta relación es una de las más importantes en geometría. Así como hace posible calcular algunos de los lados de un triángulo rectángulo, también nos permite determinar si un triángulo es rectángulo.

PROBLEMA RESUELTO

1. Dado el triángulo rectángulo de la figura 2.38 y los cuadrados construidos sobre cada uno de sus catetos, determina la medida del área del cuadrado construido sobre su hipotenusa:

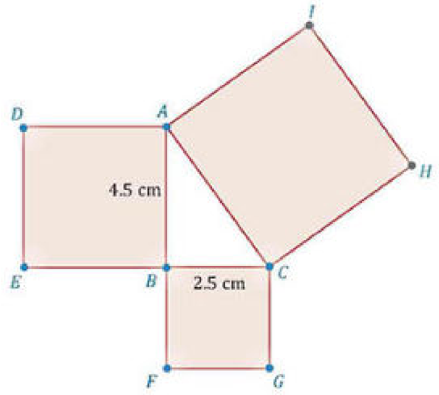


Figura 2.38

SOLUCIÓN

Procedimiento: Para determinar la medida del área del cuadrado *ACHI*, en primer lugar determinamos el área de cada uno de los cuadrados construidos sobre sus catetos, es decir: $A_{BFGC} = 2.5^2 \text{ cm}^2 = 6.25 \text{ cm}^2$ y $A_{ADEB} = 4.5^2 \text{ cm}^2 = 20.25 \text{ cm}^2$, luego, $A_{ACHI} = 6.25^2 \text{ cm}^2 + 20.25 \text{ cm}^2 = 26.5 \text{ cm}^2$.

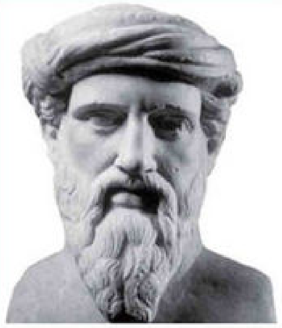
Teorema de Pitágoras

En términos un poco más algebraicos, diremos que: "Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c su hipotenusa, entonces se cumplirá que $a^2 + b^2 = c^2$. Además, si existen tres números que cumplen con la condición de que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces con ellos es posible construir un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c".

Formalmente, este enunciado dice: "La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área construida sobre la hipotenusa de dicho triángulo". Esto es lo que en matemáticas conocemos como *Teorema de Pitágoras*.

Te dejamos aquí algunos links sobre el teorema de Pitágoras y sus demostraciones. Recuperados, enero 31, 2013, de:
http://teoremadepitagoras.net/demostracion-del-teorema-de-pitagoras-con-agua/
http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm
En la siguiente página web podrás realizar la actividad Demostración, donde podrás comprobar las relaciones se cumplen entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. Recuperada, noviembre 04, 2013, de:
http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b04_t02_s01_descartes/index.html

Biografía



Pitágoras de Samos (isla de Samos, actual Grecia, 572 a.n.e. –Metaponto, hoy desaparecida, actual Italia, 497 a.n.e.) Filósofo y matemático griego. En Crotona (al sur de Italia) fundó una asociación que no tenía el carácter de una escuela filosófica, sino el de una comunidad religiosa. Por lo que se puede decir que las ciencias matemáticas nacieron en el mundo griego a partir de una corporación de carácter religioso y moral.

Apliquémoslo en la siguiente situación:

El profesor de Matemáticas de Pedro le ha dado el siguiente problema para resolver con su grupo: "Las dimensiones de una plaza son 40 m de ancho por 60 m de largo. Se quiere cercar una de las mitades triangulares de la plaza. ¿Cuántos metros de alambre necesitarán en total para esta tarea?".

Observa el esquema indicado en la figura 2.39. Podemos usar aquí el teorema de Pitágoras.

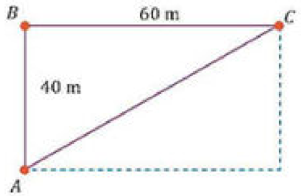


Figura 2.39

$40^2 + 60^2 = \overline{AC}^2$

$1\,600 + 3\,600 = \overline{AC}^2$

$5\,200 = \overline{AC}^2$

$\sqrt{5\,200} = \overline{AC}$

$72.11 = \overline{AC}$

¿Qué debes hacer para obtener la cantidad total de alambre que se ocupará? Explica.

¿Cuál es el valor de esta medida? ¿Es lógico el valor obtenido? Explica.

Habilidades a desarrollar: aplicar – calcular.

A

1 De los siguientes tríos de números:

i. 35, 12 y 37 ii. 485, 483 y 44 iii. 841, 840 y 40

a. ¿Cuál(es) permite(n) construir un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

b. Indica el valor del perímetro solo de aquel (los) que no es (son) rectángulo(s)

Observa ahora lo siguiente. Tomemos un trío de números que sean lados de un triángulo rectángulo. Es decir, que cumplan con el teorema de Pitágoras.

$a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ *(comprobemos que se cumple el teorema)*

$9 + 16 = 25$

$25 = 25$ *(efectivamente, el teorema se cumple)*

Tomemos múltiplos de estos números, por ejemplo, $a = 6$, $b = 8$ y $c = 10$ (amplificamos todos por 2)

$6^2 + 8^2 = 10^2$

$36 + 64 = 100$

$100 = 100$ *(también estos números cumplen con el teorema)*

¿Cada vez que multipliquemos este trío de números por otro, los números resultantes también cumplirán con el teorema de Pitágoras?

Efectivamente. Supongamos que n es un número positivo cualquiera. Si multiplicamos los números del trío inicial por n, tendremos que los nuevos números serán: $a = 3n$, $b = 4n$ y $c = 5n$. Comprobemos que se cumple el teorema:

$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$

$9n^2 + 16n^2 = 25n^2$

$25n^2 = 25n^2$ *(por lo tanto, también se cumple el teorema de Pitágoras)*

Nota que n es cualquier número positivo, no solo de los naturales, sino también de los decimales.

A estos tríos de números naturales que cumplen con el teorema de Pitágoras (o que son lados de un triángulo rectángulo) se les llama *Tríos pitagóricos*.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los triángulos de las figuras 2.40 y 2.41, verifica si ellos son o no rectángulos:

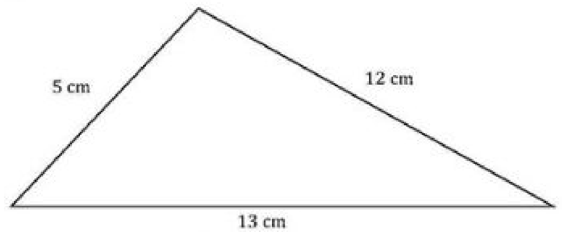


Figura 2.40

SOLUCIÓN

Procedimiento: Si este triángulo fuera rectángulo, cumpliría con el teorema de Pitágoras. La hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud, por lo tanto, debemos verificar que:

$5^2 + 12^2 = 13^2$

$25 + 144 = 169$

$169 = 169$ *(la igualdad se cumple; entonces, el triángulo es rectángulo)*

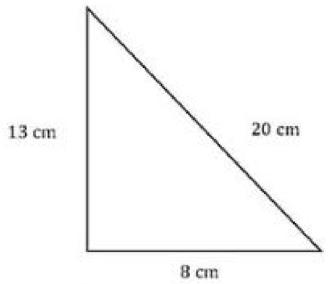


Figura 2.41

SOLUCIÓN

Procedimiento: En este caso, debes determinar la igualdad a verificar.

Resuelve esta igualdad e indica si el triángulo es o no rectángulo.

2. Para el triángulo rectángulo de la figura 2.42 determina el valor de x.

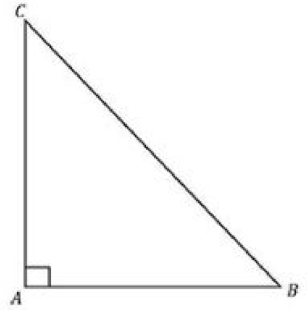


Figura 2.42

$\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm, $\overline{AC} = x$

SOLUCIÓN

Procedimiento: En el triángulo: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, esto es:

$7^2 + x^2 = 12^2$ *(resolvemos esta ecuación)*

$49 + x^2 = 144 \; / -49$

$x^2 = 95 \quad /\sqrt{}$

$x = \sqrt{95}$

$x \approx 9.75$ cm

Fíjate que estrictamente hay dos valores de x, uno positivo y uno negativo (ya que se resuelve una ecuación cuadrática). Sin embargo, como estamos trabajando con medidas de trazos, solo consideraremos los valores positivos.

3. Dados cada uno de los siguientes tríos de números:

   i. 35, 12 y 37
   ii. 841, 840 y 40
   iii. 485, 483 y 44

   a. ¿Cuál(es) permite(n) construir un triángulo rectángulo?, ¿por qué?
   b. Indica el valor del perímetro solo de aquel (los) que no es (son) rectángulo(s).

SOLUCIÓN

Procedimiento:

a. Aquellos tríos de números con los que es posible construir un triángulo rectángulo deben cumplir con el teorema de Pitágoras, es decir, deben ser tríos pitagóricos. Veamos cuáles de ellos cumplen esta condición.

i. $(12)^2 + (35)^2 = (37)^2$

$144 + 1\,225 = 1\,369$

$1\,369 = 1\,369$ *(se verifica la igualdad, por lo que es posible construir un triángulo rectángulo)*

ii. $(40)^2 + (840)^2 = (841)^2$

$1\,600 + 705\,600 = 707\,281$

$707\,200 \neq 707\,281$ *(no se verifica la igualdad, por lo tanto, no es posible construir un triángulo rectángulo)*

iii. $(44)^2 + (483)^2 = (485)^2$

$1\,936 + 233\,289 = 235\,225$

$235\,225 = 235\,225$ *(se verifica la igualdad, por lo que es posible construir un triángulo rectángulo)*

b. Calcula ahora el perímetro requerido, ya que no conocemos las unidades reales de medida de los lados, utiliza la medida u.

Y para finalizar...

Para ir desde su casa a la escuela, Margarita tiene dos opciones, como se muestra en la figura 2.43.

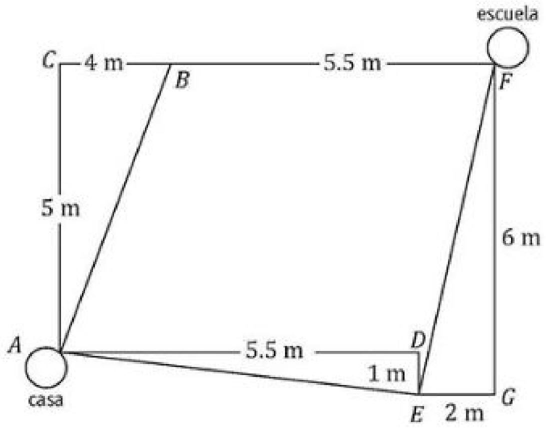


Figura 2.43

¿Discute y determina junto a otro compañero, cuál es el camino más corto para realizar este trayecto: ir por $\overline{AB} - \overline{BF}$ o ir por $\overline{AE} - \overline{EF}$? Realiza tus cálculos aproximando a la centésima.

Comprueba tus conocimientos Tema 3

I. Lee atentamente la información dada y completa según corresponda.

1 El teorema de ______ relaciona a través de una ecuación las medidas de los ________ y de la hipotenusa de un triángulo.

2 La aplicación del teorema de Pitágoras exige que el triángulo tenga un ángulo que mida__________.

3 Si en un triángulo rectángulo el lado mayor se simboliza por z, y por x e y los otros lados, entonces el teorema de Pitágoras dice que ___^{2} + ___^{2} = ___^{2}.

4 Geométricamente, el teorema de Pitágoras dice que la__________de las áreas de los cuadrados construidos sobre los______________de dicho triángulo es igual al área construida sobre su______ ______________.

5 Si en un triángulo se cumple el teorema de Pitágoras, inmediatamente se puede clasificar este, de acuerdo a la medida de sus ángulos, como un triángulo ________ ____________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios y problemas:

1 Halla el valor de la letra indicada en las figuras 2.44. a, b y c

a.

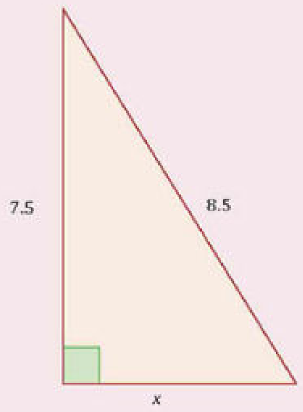


Figura 2.44 a

b.

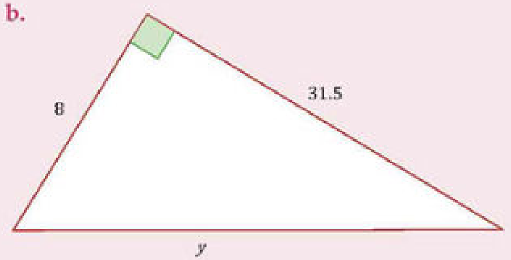


Figura 2.44 b

c.

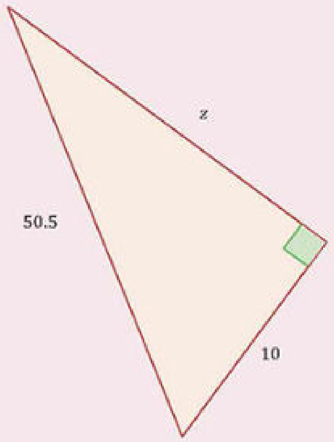


Figura 2.44 c

2 Considera $a = x - 2$; $b = 3x$ y $c = 3x + 2$, con $a < b < c$, como los lados de un triángulo rectángulo.

a. Escribe la ecuación que relaciona los lados entre sí, conforme al teorema de Pitágoras.

b. Halla x.

c. ¿Cuál es el valor del área?

3 La figura 2.45 muestra al cuadrado $ABCD$ y superpuesto a él, está el trapecio $BCFD$.

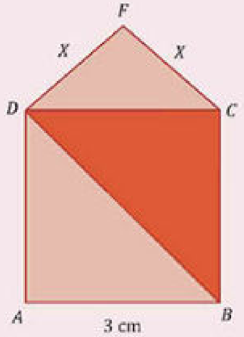


Figura 2.45

a. Indica el valor de x.

b. ¿Cuánto es la longitud del lado mayor del trapecio $BCFD$?

c. Determina el valor del perímetro del área verde.

Expresa tus respuestas aproximando a la décima.

4 La figura 2.46 muestra $\triangle MNP$ rectángulo, cuyo interior está el valor de su superficie, $\overline{MN} = n$ y $\overline{PM} = 2n$.

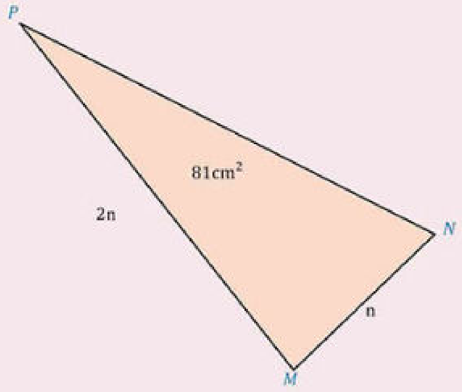


Figura 2.46

a. Escribe la ecuación que permite encontrar el valor de n.

b. ¿Cuál es el valor de cada cateto?

c. Calcula el valor de la hipotenusa.

d. ¿Supera el valor de la hipotenusa los veinte centímetros? ¿Por qué?

5 El dibujo que se presenta en la figura 2.47 es un rectángulo con las medidas de dos trazos que se han hecho en su interior.

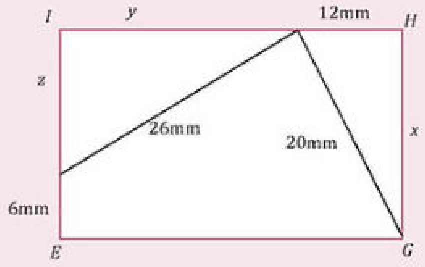


Figura 2.47

a. ¿Cuál es el valor de x en la figura 2.48 ?

b. Escribe dos ecuaciones que permitan obtener la medida de z.

c. ¿En cuántos milímetros supera y a z?

d. Suma las áreas de los triángulos y réstala al área del rectángulo. ¿Qué representa esta diferencia?

6 En la figura 2.48 se muestra una circunferencia centro O, de perímetro 25.12 unidades, y que circunscribe a un cuadrado.

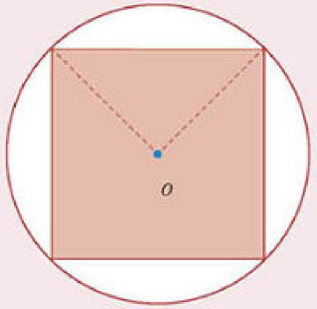


Figura 2.48

a. Calcula el valor del radio.

b. Calcula el valor del lado del cuadrado.

7 En la figura 2.49, $\overline{AB} = 4.1$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CA} = 0.9$ cm, $\overline{DB} = 3.9$ cm y h es la altura del $\triangle ABC$.

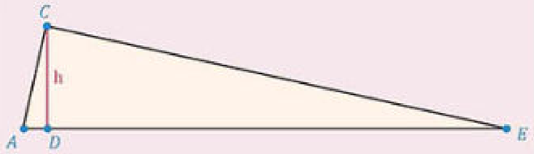


Figura 2.49

a. Verifica que $\triangle ABC$ sea rectángulo.

b. Usando el $\triangle ABC$, halla el valor de h.

8 "Así es, inspector. Me di cuenta cuando el ladronzuelo iba corriendo y atravesando en diagonal la finca vecina. Vi que se llevaba mis joyas y otras pertenencias más, y se perdió en el otro extremo". Si todas las fincas de acá son rectangulares, de medidas 40 m por 125 m, haz un bosquejo que ilustre la finca con sus medidas y simboliza por d la longitud de la diagonal. ¿Cuántos metros debió atravesar en diagonal este ladronzuelo?

9 Octavio tiene 3 varillas de metal, de 8, 15 y 16 cm, con las que está trabajando en su taller de robótica. Para hacer uno de los ensamblajes necesita construir con las varillas un triángulo rectángulo, cortando un cierto trozo en cada varilla, de modo que con los trozos sobrantes pueda armar un triángulo equilátero de lado x.

a. Escribe la ecuación que permite encontrar el valor de x.

b. ¿Cuánto vale x?

c. ¿Cuánto debe cortar de cada varilla para que pueda construir ambos triángulos?

d. Verifica que los triángulos construidos sean rectángulo y equilátero respectivamente.

10 ¡Ya, escribe!... distancia desde este punto de observación a la azotea: 156, 205 m ... y distancia desde este punto de observación a la base del edificio: 120 m más o menos, mmm ... ¡sí 120 m! Sí, hay que demolerlo – Los hombres de azul y cascos amarillos, se alejaron, mientras Juan Esteban, que estaba paseando en su bicicleta, los escuchó.

a. Indica la ecuación que permite calcular la altura del edificio.

b. ¿Qué altura es la más próxima para superar dicho edificio? Aproxima tu respuesta al entero.

11 Sé que el mástil de mi flamante velero es de 6 m y que de la parte más alta de él amarramos una cuerda de 2.5 m más, hasta atarlo a la proa. Desde la base de este mástil a la proa tiene que formar un triángulo perfecto, que debe tener un ángulo recto.

a. Haz un triángulo que represente la situación.

b. Escribe la ecuación basada en el teorema de Pitágoras y encuentra tal distancia entre la proa y el mástil con aproximación a la centésima.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar el teorema de Pitágoras.			
¿Soy capaz de explicar qué es un trío pitagórico.			
Entendí los ejemplos y ejercicios resueltos en esta sección.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			
Trabajé con mi grupo, aportando cuando fue necesario.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡excelente!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un mapa conceptual con los conceptos no adquiridos.

Nociones de probabilidad

Estudiarás en este tema

- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Lee el siguiente relato:

Mañana Juan tendrá el paseo de fin de año de su curso, y el plan es ir a la alberca, pero en el pronóstico del tiempo han anunciado que mañana habrá mal tiempo con probabilidad de lluvia. Juan rápidamente llama a su compañero Miguel Ángel quien lo tranquiliza diciéndole que si hay mal tiempo, el paseo se hará a un museo, pero que según lo que él ha podido comprobar, el pronóstico del tiempo nunca es muy certero.

Y para comenzar...

Reúnete con tres compañeros y discutan:

1. ¿Es posible que al día siguiente el informe del tiempo sea certero y que el destino del paseo del curso sea la alberca? ¿Por qué? ¿Qué nombre reciben estos eventos?
2. ¿Qué tipo de eventos es "habrá mal tiempo con probabilidad de lluvia" y "habrá muy buen tiempo"?

Con el mismo grupo resuelve los siguientes ejercicios, discutiendo y argumentando a favor o en contra de tus resultados y los de tus compañeros.

1. Clasifica los siguientes eventos en mutuamente excluyentes o complementarios:
   a. En una urna se colocaron 12 bolitas rojas y 20 verdes y se extrae una bolita al azar. Eventos: "extraer una bolita verde" y "extraer una bolita roja".
   b. En un paseo de curso asistieron 20 alumnos, 10 papás y 14 mamás. Para un juego se escoge una persona al azar. Eventos: "que la persona sea padre" y "que sea alumno".
   c. Mi mamá me invitó a salir hoy. Me dio 6 posibles alternativas de lugares: cine, centro comercial, teatro, juegos electrónicos, playa, restaurante. Eventos: "elegir el cine" y "elegir un lugar distinto del cine".
2. Inventen dos pares de sucesos que sean mutuamente excluyentes y dos que sean complementarios, luego compártanlos con el resto de la clase, analizándolos, refutándolos o validándolos según corresponda.

Es importante que refuerces los contenidos aprendidos en grados anteriores sobre este tema, pues te ayudarán a lograr una mejor comprensión de los nuevos temas que aprenderás a continuación.

Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Aníbal estaba haciendo su tarea de Matemáticas junto con su grupo de amigos. Ellos debían lanzar un dado 50 veces y anotar los números que obtenían, para luego calcular su probabilidad experimental. En este experimento, obtuvieron los siguientes resultados:

Número en el dado	Número de veces que ha salido	Probabilidad experimental
1	6	0.12
2	4	0.08
3	15	0.30
4	12	0.24
5	8	0.16
6	5	0.10

–Mira Marcela –dijo Aníbal–, voy a definir dos sucesos en el mismo experimento de lanzar un dado: el primero será "obtener un 5" y el segundo, "obtener un 6". Entonces, ¿qué pasará con la probabilidad del evento "obtener un 5 o un 6"?

–Bueno, Aníbal, dime ¿cuál es tu teoría al respecto?

–Mmmm, déjame pensar un momento... bueno, bueno, según los datos de nuestra tabla, salió 8 veces el 5 y 5 veces el 6, por lo tanto, salieron 13 veces 5 o 6. Con lo que su probabilidad será de $\frac{13}{50} = 0.26$. ¡Soy brillante!

–Bien, es un buen razonamiento. Escucha el mío. Como los sucesos que tú has definido son mutuamente excluyentes, pues no pueden aparecer el 5 y el 6 a la vez, entonces no habrá ninguna vez que al lanzar el dado se dé esta posibilidad y, por lo tanto, si las probabilidades de cada uno de ellos son 0.16 y 0.10, respectivamente, entonces, la probabilidad de uno o el otro será 0.26, es decir, la suma de ambos, pues la probabilidad de uno de ellos no es parte de la probabilidad del otro.

- ¿Te parece cierto el razonamiento de Marcela?

En efecto, cuando dos sucesos o eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de su unión (es decir, de que ocurra uno o el otro) será la suma de las probabilidades de cada uno de ellos. Esto es, si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces, $P(A \cup B) = P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un juego de naipes inglés como el de la figura 2.50, Sebastián tiene la posibilidad de ganar si extrae un 2 o un rey al tomar una carta al azar del naipe. ¿Cuál es la probabilidad que él tiene de ganar?

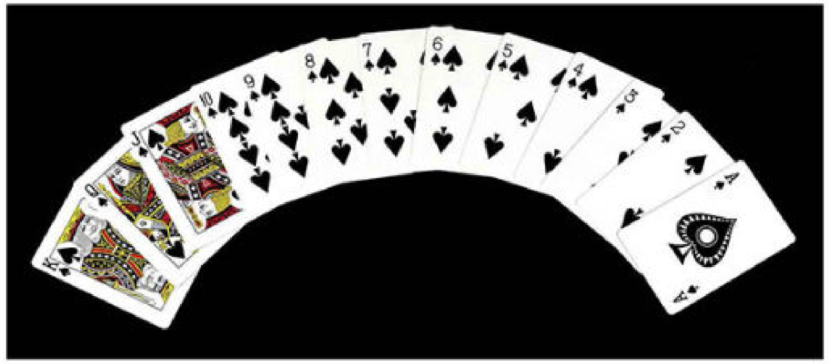


Figura 2.50

SOLUCIÓN

Procedimiento: Como extraer 2 y extraer rey son eventos mutuamente excluyentes, podemos anotar que:

$P(2 \text{ o rey}) = P(2) + P(\text{rey})$

$P(2 \text{ o rey}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \approx 0.15.$ *(es decir, aproximadamente 15%)*

2. ¿Y qué probabilidad tiene de perder?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Aquí tendríamos que calcular la probabilidad de obtener una carta distinta de dos y de rey, lo que equivale a sumar las probabilidades de obtener 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, *J* y *Q*. Pero esto es muy largo. Es mejor que pensemos en los sucesos ganar y perder, ya que ellos son complementarios, ¿no? Por lo tanto, la probabilidad de perder será 1 menos la probabilidad de ganar.

Es decir: $P(\text{perder}) = 1 - 0.15 = 0.85$. O sea, el 85%.

Recuerda y registra...

Los eventos o sucesos mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir en forma simultánea, es decir, si un evento sucede, significa que el otro no puede ocurrir.

Puedes profundizar en este tema en las siguientes páginas web. Recuperadas, febrero 1, 2013, de:
http://www.monografias.com/trabajos89/adicion-probabilidades-eventos-mutuamente/adicion-probabilidades-eventos-mutuamente.shtml
http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Probabilidad-Estadistica-Juegos-de-Azar/Probabilidad-Sucesos-Excluyentes-Simultaneos.htm

También en la siguiente página web puedes elegir la actividad Probabilidad, donde podrás elegir, sucesivamente, dos eventos de un experimento. Cuando estos sean mutuamente excluyentes, calcula la probabilidad de que ambos ocurran. Recuperada, noviembre 04, 2013, de:
http://lite.org.mx/repositorio/portafolios/gis/02_gis/recursos/mat2/oda/2m_b04_t04_s01_descartes/Principal.html

Cálculo de la probabilidad de eventos complementarios

–¡Miren! –dijo Marcela, una de las compañeras de Aníbal–. ¡¿No les parecen extraños los números de la tabla anterior?! ¡¿No ven ninguna regla especial?!

–¡Ay, Marcela, tú siempre tratando de ver "algo" especial!

–Lo que sucede es que ustedes nunca ven nada. En algo estamos de acuerdo, estos números son todos los posibles resultados en un dado y, por lo tanto, todos los posibles elementos del espacio muestral de "lanzar una dado", ¿me siguen?...

–Sí, claro –respondieron a coro–, en eso te seguimos.

–Pues bien, si se fijan en la columna de las probabilidades de cada número y suman todos ellos da por resultado 1... ¿No les parece curioso? Yo había hecho este experimento en mi casa y, aunque obtuve diferentes probabilidades para cada número, siempre sumó 1 el total de ellas.

- ¿Qué opinas tú de la afirmación de Marcela? ¿Por qué sucederá esto?

Pensemos. Cada uno de los números del dado es una parte del dado o del todo (o del entero) y, además, los sucesos de obtener cada uno de los números es mutuamente excluyente con respecto a los otros, es decir, nunca sucederá que pasen dos de ellos a la vez. Por lo tanto, cada una de estas partes no se interseca con las otras, y todas forman el entero. Lo mismo sucederá con sus probabilidades. Si pensamos en obtener un número del 1 al 6 al lanzar el dado, tendremos que su probabilidad es 100% o 1, que es lo que refleja la tabla.

- ¿Estás de acuerdo?

Ahora bien, si pensamos en los eventos "obtener un número mayor que 2" y "obtener un número menor o igual a 2", estarás de acuerdo con el hecho de que ellos son complementarios y con que sus probabilidades deben sumar 1. Por lo tanto, podemos decir que $P(>2) + P(\leq 2) = 1$, es decir, $P(>2) = 1 - P(\leq 2)$

En general, esto sucede con todo par de eventos complementarios. Si A es un evento y A^c su evento complementario, entonces se tiene que: $P(A^c) = 1 - P(A)$ o $P(A) = 1 - P(A^c)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sabemos que en un dado cargado la probabilidad de que salga un número impar es 0.15. ¿Cuál será la probabilidad de que al lanzarlo se obtenga un número par?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Los sucesos involucrados aquí son complementarios, pues uno (que salga par) es el contrario del otro (que salga impar). Por lo tanto, podemos decir que:

$P(\text{par}) = 1 - P(\text{impar})$, esto es, $P(\text{par}) = 1 - 0.15 = 0.85$. O sea, 85%.

2. En una urna hay fichas blancas y negras. La probabilidad de que al extraer una ficha esta sea blanca es de 0.35. Si en total hay 60 fichas en la urna, ¿cuántas de ellas son negras?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Como los eventos "extraer blanca" y "extraer negra" son complementarios, entonces la probabilidad de extraer una ficha negra será $P(n) = 1 - P(b) = 1 - 0.35 = 0.65$. Entonces, podemos plantear que:

$$P(n) = \frac{\text{total fichas negras}}{\text{total de fichas}} = \frac{x}{60}$$

$$\Rightarrow \quad 0.65 = \frac{x}{60} \quad \Rightarrow \quad x = 39$$

(por lo tanto, hay 39 fichas negras en la urna)

3. Si una moneda cargada es tal que la probabilidad de obtener cara es 0.37, ¿cuál será la probabilidad de obtener cruz?

SOLUCIÓN

Procedimiento: En este caso, ¿podemos hablar de sucesos complementarios? Explica. Determina tú este valor.

Recuerda y registra...

Los sucesos o eventos complementarios son aquellos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio muestral, es decir, el espacio muestral de uno de ellos, más la suma del espacio muestral del otro, resulta en el conjunto de todos los resultados posibles.

Puedes entrar a la siguiente página web y realizar simulaciones de volados con dos, tres y hasta cuatro monedas, así como determinar algunas probabilidades relacionadas con este experimento. Recuperada, noviembre 04, 2013, de. *http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_monedas3.htm*

Y para finalizar...

Reúnete con otro compañero y plantea un evento, del que sea factible calcular su probabilidad, de tal manera que el evento que tu compañero invente otro evento que sea mutuamente excluyente del tuyo, al que también se le pueda calcular la probabilidad.

Realiza lo mismo con dos eventos complementarios, y discutan otros posibles eventos que puedan ser complementarios o mutuamente excluyentes de los que ya tienen, argumentando las razones de esta elección.

Luego, calculen la probabilidad de los pares de eventos iniciales que plantearon.

Dado cargado: dado que tiende a caer más sobre una de las caras que sobre las otras.

Comprueba tus conocimientos Tema 4

I. Frente a cada una de las siguientes afirmaciones, coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

1 ___ El valor de la suma de las probabilidades de dos sucesos mutuamente excluyentes puede ser 1.

2 ___ Si la probabilidad de un suceso es de 34%, entonces la probabilidad del suceso complementario es de 1 – 34%.

3 ___ Siendo M y N eventos mutuamente excluyentes, entonces, $P(M \cup N) = P(M \text{ o } N) = P(M) + P(N)$

4 ___ Si dos sucesos son mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es cero.

II. Justifica aquellas afirmaciones que son falsas en el ejercicio I.

III. Resuelve los siguientes ejercicios y problemas:

1 Se dispone de un dado de ocho caras cargado, cuyas probabilidades de aparición para cada número están dadas en la siguiente tabla:

Número	Probabilidad experimental
1	0.08
2	0.13
3	0.11
4	0.15
5	0.135
6	0.17
7	0.145
8	x

a. Determina el valor de x.

b. ¿Cómo está presente el cálculo de la probabilidad de sucesos complementarios en la obtención de x?

2 Gilberto está estudiando probabilidades. Por un momento se detiene y comienza a barajar todas sus posibilidades de aprobar:

a. En el examen de Matemáticas estimo que hay 55% de que obtenga la nota mínima, pero no suficiente para mi aprobación de la asignatura, y 35% de que obtenga una nota inferior al mínimo. Pero igualmente obtener una calificación mayor al mínimo es de... Dime ¿qué probabilidad hay de que esto ocurra?

b. Finalmente, ¿por qué el porcentaje que me has indicado en **a.** no garantiza que apruebe Matemáticas?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
¿Soy capaz de explicar cómo se calcula la probabilidad de un suceso que es complementario a otro?			
¿Soy capaz de explicar cómo se calcula la probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes?			
¿Entendí los ejercicios resueltos?			
¿Desarrollé correctamente los ejercicios propuestos?			
¿Colaboré con mis compañeros cuando tuvimos que trabajar en grupo?			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), relee los ejercicios resueltos y vuelve a realizar los ejercicios propuestos con ayuda de tu maestra o maestro.

Síntesis Bloque 2

A continuación se muestra un mapa conceptual que resume las ideas más importantes que se han presentado en este bloque. Debes completarlo con los contenidos recién aprendidos.

BLOQUE 2

- Ecuaciones cuadráticas
  - Si son del tipo ______. Se resuelven ______. Y sus soluciones son ______.
  - Si son del tipo ______. Se resuelven ______. Y sus soluciones son ______.
- Transformaciones
  - Traslaciones: Son ______. Se construyen ______.
  - Rotaciones: Son ______. Se construyen ______.
  - Simetrías centrales: Son ______. Se construyen ______.
- Teorema de Pitágoras
  - Geométricamente dice que ______.
  - Algebraicamente dice que ______.
- Probabilidad
  - Si A y B son eventos ______, su probabilidad se calcula como ______.
  - Si A y B son eventos ______, su probabilidad se calcula como ______.

Comprueba tus conocimientos Bloque 2

I. Coloca V (verdadero) o F (falso) frente a cada afirmación según corresponda.

1 ____ Las ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 = bx$ siempre tienen dos soluciones y una de ellas siempre es 0.

2 ____ La ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene solamente una solución.

3 ____ Toda rotación es también una simetría central.

4 ____ Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 15 y 36 cm, entonces su hipotenusa mide 37 cm.

5 ____ Si dos eventos, A y B, son complementarios, la probabilidad de A se puede calcular como $1 - P(A)$.

II. Resuelve los siguientes ejercicios y problemas escribiendo todo el desarrollo en tu cuaderno:

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $3x^2 - 5x = x(2x - 3)$

b. $3(x^2 - 2x + 9) = x(2x - 1) + 33$

c. $\frac{x^2}{4} + \frac{2x}{6} = \frac{x^2 - 3x}{3}$

2 Dada la figura 2.51, realiza la traslación en el vector dado.

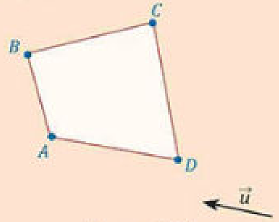


Figura 2.51

3 Dadas las figuras 2.52 a, b y c, determina si ellas tienen centro de simetría central.

a. 

Figura 2.52 a

b. 

Figura 2.52 b

c. 

Figura 2.52 c

4 Dado el triángulo rectángulo en B de la figura 2.53, determina los valores pedidos en cada caso:

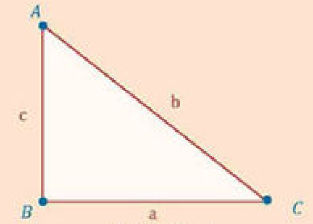


Figura 2.53

a. El perímetro del triángulo si a = 2.5 cm y c = 4.6 cm

b. El área del triángulo si c = 36 m y b = 60 m

5 Ximena está trabajando para una agencia de marketing. Ella tiene el proyecto de unas nuevas paletas que irán dirigidas a niñas de hasta 4 años. Para ello, debe confeccionar un afiche publicitario con su eslogan correspondiente. Después de un arduo día de trabajo, su afiche quedó como se indica en la figura 2.54:

Figura 2.54

En él hay una traslación, dos simetrías y una rotación. ¿Dónde están? Defínelas matemáticamente.

6 Luis decidió hacer orden en el baúl de sus juguetes. Dejó a un lado los que ya no quiere y va a regalar y dejó en el baúl 13 autitos, 22 camiones, 20 aviones y 2 tanques. Decidió que mañana tomará un juguete al azar y jugará con él. ¿Cuál es la probabilidad de que este juguete sea tanque o camión?

1 Valentina fue de compras junto con su mejor amiga. Ella compró un pantalón, una blusa y un par de zapatos y pagó por todo 2 620 pesos. Si sabemos que el par de zapatos costó el doble del precio de los pantalones más 170 pesos y la blusa costó 510 pesos menos que los pantalones, ¿cuál es el precio que Valentina pagó por sus pantalones?

2 Rodolfo está armando un juego de azar para presentarlo como proyecto de matemáticas para su escuela. Él diseñó una tómbola en la que colocará bolitas de tres colores: rojo, blanco y verde. Él quiere que la probabilidad de obtener una bolita verde sea del 35%. Marca Sí o No para indicar con cuáles de las siguientes combinaciones se obtendrá lo pedido.

A. 50 blancas, 35 verdes y 15 rojas	Sí/No
B. 16 blancas, 14 verdes y 10 rojas	Sí/No
C. 9 blancas, 21 verdes y 30 rojas	Sí/No

3 La figura 2.55 representa un hexágono regular. Basado en esta información, responde.

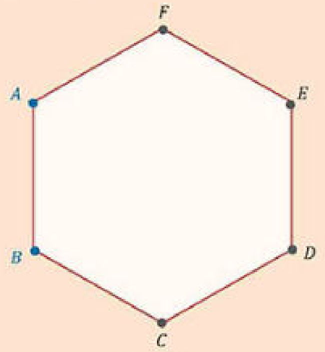


Figura 2.55

a. ¿En qué ángulo y con qué centro de rotación habrá que girarlo para que el nuevo hexágono coincida con el dado?

b. ¿Crees tú que solo con traslaciones se podrá cubrir una hoja de papel con esta figura? Explica cómo lo harías o por qué no es posible.

Evaluándonos

Autoevaluación

Realiza esta autoevaluación sobre tu desempeño en este bloque, de manera responsable y honesta, pues esta información te ayudará a remediar y mejorar tu desempeño.

Contenido	Sí lo logré	Me falta mejorar
Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.		
Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.		
Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.		
Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.		
Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.		
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).		

Heteroevaluación

Pídele a un compañero que valore si:

Actitud	Sí lo hice	Me sugieren mejorar
En las actividades grupales, colaboré con mis compañeros, argumentando y explicando los procedimientos utilizados.		
Tuve una participación relevante en las actividades grupales propuestas.		
Al exponer las ideas y resultados del grupo ante el resto del curso, lo hice claramente y explicando los procedimientos utilizados.		
Expuse mis ideas claramente y respetando siempre la opinión de los demás integrantes.		
Siempre tuve una actitud abierta y receptiva a las sugerencias de mis compañeros de grupo.		

Heteroevaluación

Con la ayuda de tu maestro analiza tu desempeño y pídele que te sugiera estrategias para mejorar.

Al finalizar el bloque, el alumno:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Estudiarás en este bloque:

Tema 1: Patrones y ecuaciones

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Tema 2: Figuras y cuerpos

- Aplicación de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
- Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
- Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

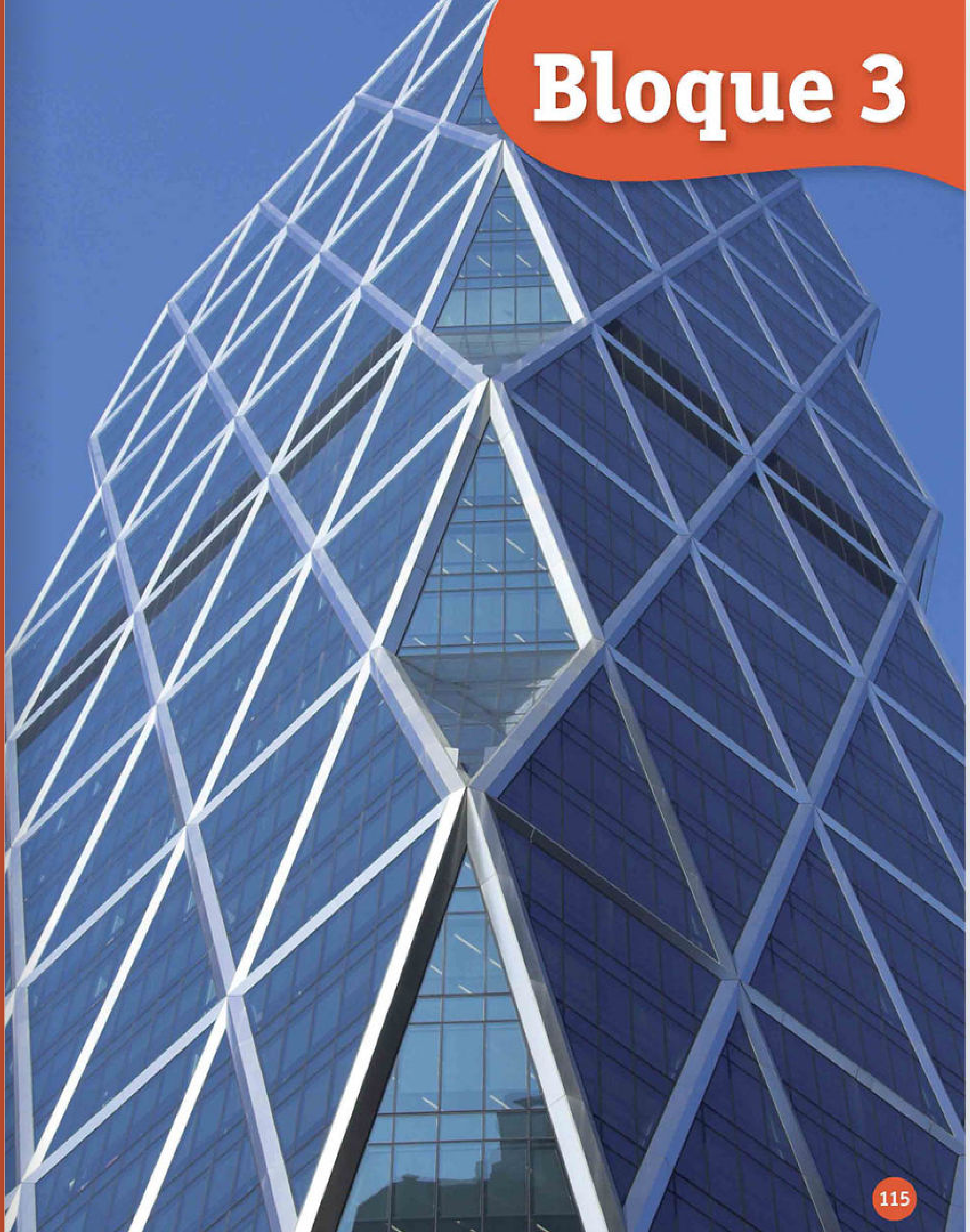
Tema 3: Proporcionalidad y funciones

- Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Tema 4: Nociones de probabilidad

- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Bloque 3



Patrones y ecuaciones

Estudiarás en este tema

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Lee el siguiente relato:

El origami es un arte de origen japonés que consiste en el plegado de papel y sin necesidad de utilizar tijeras ni pegamento, obtener figuras de formas variadas, varias de las cuales podrían considerarse como esculturas de papel.

Esta técnica permite transformar el papel en formas de distintos tamaños partiendo de una base inicial rectangular o cuadrada que pueden ir desde sencillos modelos hasta plegados de gran complejidad.

Te invitamos a realizar una actividad en la que combinarás las matemáticas y el arte mediante el diseño de alguna figura que te llame la atención, usando esta técnica. Para ello, debes reunirte con otro compañero y realizar un diseño como el que te presentaremos a continuación u otro que encuentres. Luego, debes determinar el área del papel que utilizarás y luego determinar el área final aproximada de la figura, descomponiéndola en figuras conocidas y de las que conozcas la medida de sus lados. Todo lo anterior lo debes realizar de manera general, es decir, considerando las medidas de los lados de tus figuras con un nombre genérico, como se muestra en la figura 3.1.

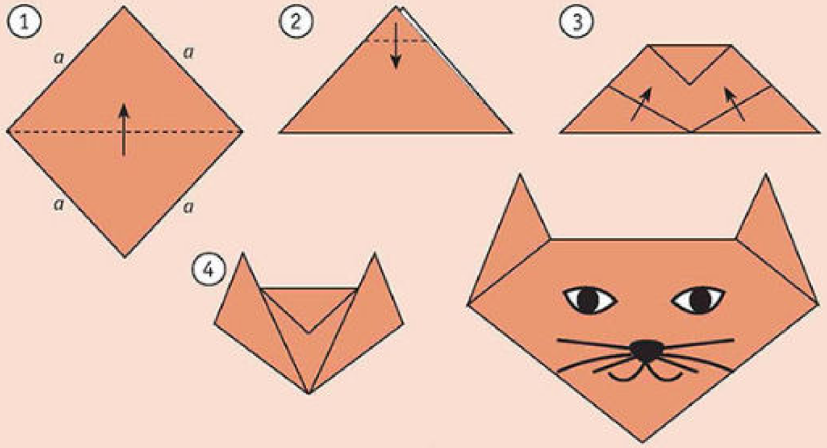


Figura 3.1

Y para comenzar...

1. ¿Si no contamos con el valor de la medida de los lados de una figura, podemos calcular el valor numérico de su perímetro, de su área y de su volumen?

2. ¿Y el valor genérico de estas magnitudes, utilizando solo variables?

Debes recordar y reforzar muy bien el uso de fórmulas pues será indispensable para la comprensión de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas que aprenderás a continuación.

Variable: cantidad que puede tomar varios valores numéricos según su contexto.

Fórmula general para resolver las ecuaciones cuadráticas

En la clase de Daniel y Paulina se está organizando la fiesta de graduación con la que celebrarán su término de preparatoria. Para ello, han reunido \$50600. El señor Lucas Montecinos, encargado de la empresa que más les gusta, les dijo que si él les rebajara en \$165 el costo por persona, entonces podrían ir 6 más. Interesados por esta oferta, deben hacer los cálculos de la cantidad de personas que pueden ir y cuánto costaría el menú por cada uno.

Celeste, la hermana menor de Daniel, que estaba escuchando la conversación, le dijo a Daniel: "¡¿Pero cómo pueden calcular eso?!"

Daniel le explicó:

Llamemos x a la cantidad de personas que van e y al costo de la cena, por persona, entonces podemos anotar que:

$$x \cdot y = 50\,600$$

Ahora bien, como nos rebajarán \$ 165 y podrán ir 6 personas más, podemos anotar también que:

$$(x+6)(y-165) = 50\,600$$

Despejamos la incógnita y de la primera ecuación y luego la remplazamos en la segunda:

$$\text{Si } x \cdot y = 50\,600 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{50\,600}{x}$$

Remplazando en la segunda ecuación, tenemos que:

$$(x+6)\left(\frac{50\,600}{x} - 165\right) = 50\,600$$

Multiplicando término a término, se tiene:

$$50\,600 - 165x + \frac{303\,600}{x} - 990 = 50\,600 \qquad / -50\,600$$

$$-165x + \frac{303\,600}{x} - 990 = 0 \qquad / \cdot x$$

$$-165x^2 + 303\,600 - 990x = 0 \qquad / \cdot -1 \qquad \text{(y ordenando)}$$

$$165x^2 + 990x - 303\,600 = 0$$

"¿Y qué tipo de ecuaciones son estas? –preguntó Celeste– ¿Y cómo se resuelven?".

De acuerdo a lo que has aprendido hasta ahora, ¿de qué tipo es esta ecuación?

¿Es posible resolver esta ecuación mediante los métodos que has aprendido hasta ahora? Explica.

Como puedes ver, la ecuación anterior no es de fácil factorización y los matemáticos se enfrentaban a este problema al tratar de resolverlas. La idea de ellos era encontrar una fórmula que los ayudara a solucionar cualquier ecuación cuadrática. Por eso plantearon y demostraron una *Fórmula general* que permite resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Si la ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, debes tener en cuenta lo siguiente:

- El coeficiente a es el factor numérico del término que contiene a x^2.
- El coeficiente b es el factor numérico del término que contiene a x.
- El coeficiente c es el término libre.

Luego, remplazamos dichos valores en la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, ahora podemos responder el problema de Daniel y Paulina. La ecuación que ellos deben resolver es:
$165x^2 + 990x - 303\,600 = 0$. Aquí, $a = 165$, $b = 990$ y $c = -303\,600$.
Remplazando:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-990 \pm \sqrt{990^2 - 4 \cdot 165 \cdot -303\,600}}{2 \cdot 165}$$

$$x = \frac{-990 \pm \sqrt{980\,100 + 200\,376\,000}}{330}$$

$$x = \frac{-990 \pm \sqrt{201\,356\,100}}{330}$$

$$x = \frac{-990 \pm 14\,190}{330}$$

(nota que tendrás dos resultados, uno cuando sumes y el otro cuando restes)

$$x_1 = \frac{-990 + 14\,190}{330} = \frac{13\,200}{330} = 40$$

$$x_2 = \frac{-990 - 14\,190}{330} = \frac{-15\,180}{330} = -46$$

Como x representa la cantidad de personas que asistirían originalmente, sin la oferta, a la fiesta, no puede ser negativa. Por lo tanto, originalmente asistirían 40 personas. Remplazando este valor en
$y = \frac{50\,600}{x} = \frac{50\,600}{40} = 1\,265$, cada uno debería pagar \$ 1 265.
Ahora bien, con la oferta que les hizo el Señor Montecinos podrán asistir 46 personas y cada una de ellas pagará \$ 1 100.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $21x^2 - 8x - 5 = 0$

SOLUCIÓN

Procedimiento: En primer lugar, nota que para aplicar la fórmula, uno de los miembros de la ecuación debe ser 0. Ahora determinamos los coeficientes numéricos que utilizaremos:

$\Rightarrow a = 21, b = -8$ y $c = -5$

(remplazando valores de a, b y c)

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 21 \cdot -5}}{2 \cdot 21}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 420}}{42}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{484}}{42} = \frac{8 \pm 22}{42}$$

Por lo tanto, tenemos las soluciones:

$$x_1 = \frac{8 + 22}{42} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \text{ o } x_2 = \frac{8 - 22}{42} = \frac{-14}{42} = -\frac{1}{3}$$

Así, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{5}{7} \text{ o } x_2 = -\frac{1}{3}$$

2. $5(x^2 - 6x) + 45 = 4(5 - x^2)$

SOLUCIÓN

Procedimiento:

(desarrollando los paréntesis)

$5(x^2 - 6x) + 45 = 4(5 - x^2)$

$5x^2 - 30x + 45 = 20 - 4x^2 \quad / -20 + 4x^2$

$9x^2 - 30x + 25 = 0$

(si bien esta ecuación se puede factorizar, aplicaremos la fórmula. Recuerda que esta se puede utilizar en cualquier ecuación)

$a = 9$, $b = -30$ y $c = 25$

Remplazando en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se tiene que:

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} = \frac{30 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{30 \pm 0}{18}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{30 + 0}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{30 - 0}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$

Recuerda y registra...

Todas las ecuaciones cuadráticas, no importa qué forma tengan, se pueden resolver mediante la fórmula general de resolución de ecuación cuadrática. Nota que:

Si la ecuación es de la forma $ax^2 + c = 0$, el valor de b que debes remplazar en la fórmula será 0.

Si la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$, el valor de c que debes remplazar en la fórmula será 0.

Nota que esta ecuación tiene dos soluciones iguales o una sola solución.

3. $(4x-3)=x-9$

SOLUCIÓN
Procedimiento:

$x(4x-3)=x-9$ *(resolviendo el paréntesis)*

$4x^2-3x=x-9 \qquad /-x+9$

$4x^2-4x+9=0 \qquad /a=4, b=-4 \text{ y } c=9$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-144}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{-128}}{8}$$

Al tratar de calcular $\sqrt{-128}$ te darás cuenta de que ningún número positivo o negativo que hayas estudiado, al elevarlo al cuadrado, dará por resultado -128, por lo tanto, esta raíz no existe y, luego, esta ecuación no tendrá solución en el conjunto de dichos números.

4. Te desafiamos a resolver el siguiente problema: El área de un cuadrado es 32 cm^2. Determina la medida de su diagonal.

SOLUCIÓN
Procedimiento: Los lados de un cuadrado serán iguales, y en la figura 3.2 se han nombrado con la letra a. Para determinar el valor de la diagonal de este cuadrado, puedes utilizar un conocido teorema ya estudiado que se utiliza en los triángulos rectángulos, ¿lo recuerdas? Plantea y resuelve esta ecuación, considerando además que el área de un triángulo se calcula como: $A=\frac{b\cdot a}{2}$, donde b es la base del triángulo y a corresponde a su altura, y que el área total del cuadrado corresponde a 2 veces el área del triángulo.

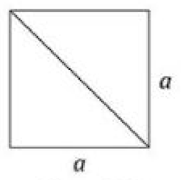


Figura 3.2

Puedes repasar y profundizar este contenido en la siguiente página web, recuperada, noviembre, 07, 2013, de: *http://www.aprendematematicas.org.mx/notas/algebra/DGB1_4_1_3.pdf*

Más que...

Si las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática se calculan por la fórmula,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

entonces, que una ecuación tenga dos soluciones reales o una solución real o no tenga soluciones reales dependerá de la cantidad subradical de la raíz, a la que se le llama discriminante y se representa por Δ.

Así, $\Delta=b^2-4ac$ y tendremos que si:

$\Delta>0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática tendrá dos soluciones reales y distintas $\Delta=0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática tendrá solo una solución real (o dos soluciones reales e iguales) $\Delta<0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática no tendrá soluciones reales (pues la cantidad subradical será negativa).

Y para finalizar...

Forma con tus compañeros grupos de no más de 3 personas y plantee cada uno una ecuación cuadrática que solo se pueda resolver mediante el uso de la fórmula general y que además, modele una situación cotidiana. Luego, justifica ante tus otros compañeros de grupo, la elección, resolución y comprobación de tu ecuación.

Comprueba tus conocimientos Tema 1

I. Coloca Verdadero (V) o Falso (F) en cada afirmación según corresponda. Justifica el porqué las afirmaciones falsas lo son.

1 Sea $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$, entonces:

a. ____ Este tipo de ecuación siempre tiene solución.

b. ____ La fórmula de resolución es

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

2 Ahora bien, considerando $8x^2-18x-5=0$, luego:

a. ____ Se debe aplicar la fórmula de resolución, porque no es directamente factorizable.

b. ____ $a=8$, $b=-18$ y $c=-5$

c. ____ Las soluciones son las mismas que las obtenidas en $4x^2-9x-2.5=0$

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general y comprueba el(los) resultado(s) obtenido(s):

a. $2x^2+3x-5=0$

b. $6x^2+3=-11x$

c. $3x(x+2)-4x(x+6)=77$

d. $(3x+1)^2-(2x-3)^2=0$

e. $\frac{3y^2-(4y+5)}{7}=\frac{105}{17}$

f. $\frac{1}{7z+2}=\frac{z}{9}$

g. $\frac{3x^2-6(x+1)}{9}=\frac{3}{5}$

h. $\frac{9}{4-z}=\frac{z+4}{z+2}$

i. $\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{5}=\frac{17x-2}{10}$

2 n y $90-7n$ son números naturales tales que la suma de sus cuadrados es 1 730.

a. Escribe la ecuación correspondiente.

b. Explica por qué es necesario hacer uso de la fórmula general para la resolución de la ecuación anterior.

c. Encuentra ambos números.

3 Desarrolla cada ejercicio y da respuesta a la pregunta planteada.

a. Al dividir 961 por un cierto número resulta este mismo número. ¿Cuál es el número?

b. Dividiendo 229 por y, se obtiene y como cociente y resto igual a cuatro. ¿Cuál es el valor de y?

4 La medida de superficie de un triángulo equilátero de lado a es $\sqrt{192}$ m^2 ¿Cuál es el valor de su perímetro?

5 Se dispone de un cuadrado de lado a medido en metros. Si se aumentan dos de sus lados opuestos en cuatro metros y los otros dos en seis metros se obtiene un rectángulo de doble área que el área del cuadrado:

a. Haz un bosquejo de la situación.

b. Encuentra la medida de los lados del rectángulo.

6 Los coeficientes a y b de la ecuación $ax^2+bx-6=0$ cumplen las siguientes condiciones: $2a+b=15$ y $-5a+3b=23$.

a. Halla los valores de a y b respectivos y remplázalos en $ax^2+bx-6=0$

b. En la ecuación obtenida en **a.** ¿Cuáles son los valores de x?

c. Si en la ecuación que has escrito en **a.** cambias -6 por $+16$, ¿por qué no es posible obtener el valor de x, haciendo uso de la fórmula general?

7 Dada la figura 3.3,

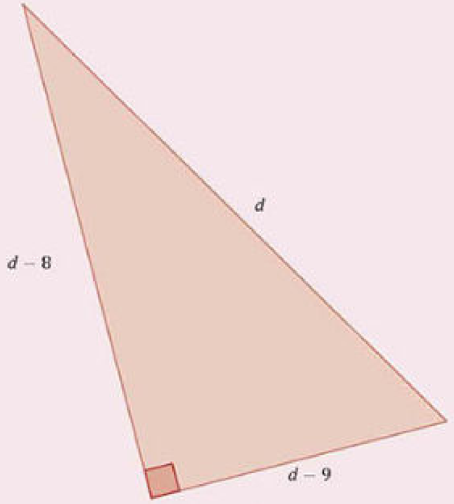


Figura 3.3

a. Escribe la ecuación cuadrática que permite la obtención de d.

b. Encuentra el valor de cada lado.

8 Santos revisó en internet maneras de construir cohetes de juguete y encontró, además, una ecuación para calcular el tiempo, en segundos, en que ese tipo de cohetes tardaría en alcanzar 30 m desde la plataforma de lanzamiento: $-2t^2 + 15.49t = 3$, pero al resolverla, no coincidió con el tiempo que allí mostraban.

a. ¿A qué valor(es) se refiere esta ecuación? Aproxima a la centésima.

b. Supongamos que la altura por alcanzar fuera la mitad del valor anterior, es decir, el tiempo requerido para esto está dado por $-2t^2 + 15.49t = 1.5$. ¿Será verdad que el tiempo necesario corresponde a la mitad del valor encontrado en **a.**?

9 El distraído Hipólito revisó los apuntes sobre la proporcionalidad inversa que están presentes en un viejo libro. En voz alta, repetía: si para realizar un determinado trabajo, 24 trabajadores se demoran dos días, 12 trabajadores lo efectuarían en el doble de tiempo, siempre y cuando se guarden las mismas condiciones. Por otro lado, $3y + 5$ trabajadores tardarían $3y + 3$ días. Sin darse cuenta, se había adentrado en el mundo de las ecuaciones cuadráticas.

Previamente, encuentra el valor de la constante de proporcionalidad y responde:

a. Escribe la ecuación de segundo grado que se deriva de lo descrito en el enunciado.

b. ¿A qué valor de y se refería?

c. ¿Cuántos eran los trabajadores y cuántos días tardarían en realizar el trabajo?

10 Cuando llegó el tío Jacob con cinco galones de barniz, nos explicó que los aplicaría en el frontón de nuestra casa, en la parte triangular de la fachada que reposa sobre la cornisa. Agregó que como la altura mide 1 metro menos que la base, no le fue difícil hacer el cálculo con respecto al número de galones que usaría en el frontón, ya que para el de su casa, usó dos galones menos. ¿Y por qué menos?, le pregunté. Entonces señaló que aunque el frontón de su casa tiene 1 metro más de base, la altura es 2 metros menos que el frontón de la nuestra.

a. Establece la proporción necesaria a resolver, usando la letra b como la medida de la base.

b. ¿Puedes tú calcular cuál es el área de ambos frontones?

c. ¿Cuánto rinde cada galón de pintura?

11 Mi abuelo me dijo que existe una relación entre la velocidad de escape en la Luna, en km/s, (velocidad mínima de un cuerpo para despegar hacia el espacio, sin orbitar el planeta, desde el suelo) y su aceleración de gravedad, en m/s². Según lo que he averiguado, esto es:

$v_e = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot R_L}$

Como la velocidad de escape en la Luna (v_e) es, numéricamente 1,46 veces aceleración su gravedad (g_L) y el radio lunar (R_L) es aproximadamente 1 734 km, entonces... hagamos los cálculos, y estimemos la aceleración de gravedad lunar en m/s² y su velocidad de escape en km/s. Usa tu calculadora y aproxima tus resultados a la centésima.

12 Matilde le pidió a su hermano que le ayudara a construir una caja muy especial para sus juguetes. Debe ser de base cuadrada, sin tapa, de alto 30 cm y que su volumen sea 588 L. Además, debe ocupar un cartón cuadrado. El hermano de Matilde después de hacer algunos cálculos, le dio las medidas precisas para que consiguiera el cartón. ¿Cuáles eran estas medidas?

13 Don Alfonso, dueño de una fábrica de muebles, les encarga a dos operarios un trabajo que, juntos, debieran terminar en 6 semanas. Sin embargo, deciden hacerlo por separado. Sabiendo que siempre uno de ellos se demora 5 semanas más que el otro en terminar los trabajos, ¿cuánto se demorará cada uno trabajando por separado? ¿Qué les dirías para que se convencieran de que el trabajo en equipo es una buena alternativa?

14 Rosaura estudia y trabaja. En la noche rendida por el cansancio de hacer sus tareas, no alcanza resolver la siguiente ecuación, en la cual cada factor representa, en cm, la medida de una arista en un paralelepípedo: $2(2x - 3)(5x - 9) = 224$.

a. ¿Qué representa esta fórmula? ¿Su desarrollo, conduce a una ecuación de segundo grado que deba solucionarse usando la fórmula general? ¿Por qué?

b. Determina el valor de x y escribe la medida de cada arista.

c. ¿Cuál es el valor de x, si el valor de cada arista disminuye en una unidad pero se mantienen los 224?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar cómo se resuelven las ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general para ello.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Pude resolver correctamente los ejercicios propuestos en este tema.			
Colaboré con mi grupo activamente cuando fue necesario.			

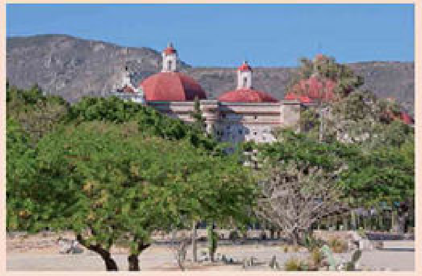
Si obtuviste todos indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un mapa conceptual con los conceptos no adquiridos.

Figuras y cuerpos

Estudiarás en este tema

- Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
- Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
- Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Observa la siguiente imagen que muestra una fotografía y su ampliación:



Y para comenzar...

1. Las medidas de los lados de una de las fotografía son 7 cm de ancho y 12 cm de largo, individualmente, determina las medidas de su ampliación, de tal manera que el homólogo del lado que mide 7 cm, mida 13 cm en la fotografía ampliada, ¿cuánto debe medir el otro lado?
2. Si ahora se desea reducir la fotografía original, ¿cuánto deben medir los lados homólogos de esta nueva fotografía, si la razón de semejanza es 3:1? Considera las medidas reales de la fotografía más grande.
3. ¿Qué nombre reciben estas figuras? ¿Cuáles son sus características?

Para revisar estos contenidos resuelve individualmente los siguientes ejercicios:

1. Dadas las figuras 3.4 a, b y c, decide si estas son congruentes o semejantes, justificando tu decisión con alguno de los criterios aprendidos en el bloque 1 para la congruencia y la semejanza de triángulos. Luego, reúnete con dos compañeros y comparen sus apreciaciones, explicando y justificando en cada caso:

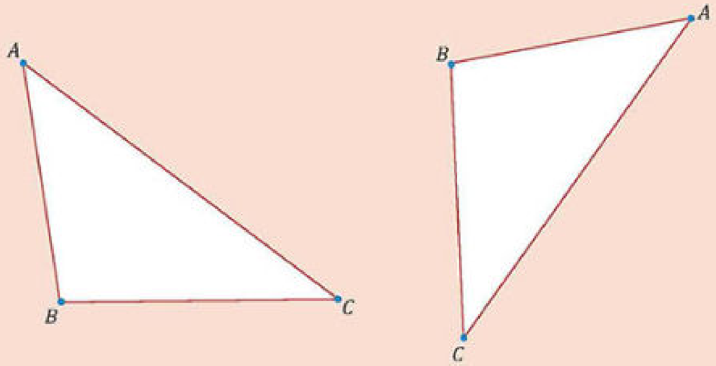


Figura 3.4.a

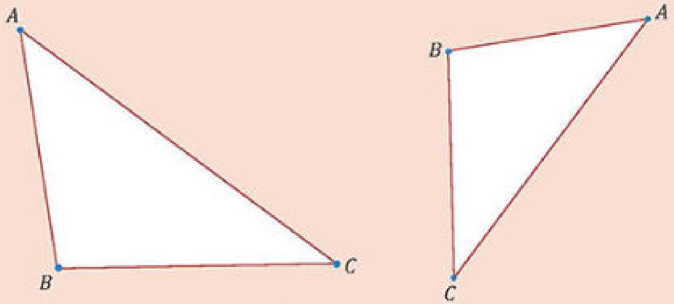


Figura 3.4.b

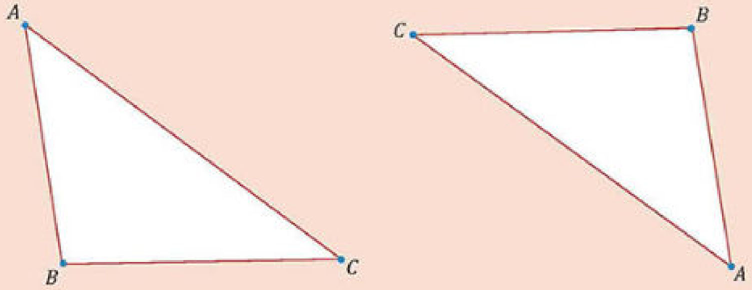


Figura 3.4.c

Es importante que repases estos contenidos, que han sido revisados recientemente, pues serán la base para un buen aprendizaje de los nuevos contenidos que veremos a continuación.

Aplicación de la congruencia de triángulos a la resolución de problemas

–¡Para qué sirve todo esto de las congruencias! –rezongaba Lupita, sin notar que su maestro estaba detrás de ella–. ¡Yo vivo de lo mejor sin ellas!

–Lupita –dijo su maestro–, hoy aprenderemos en qué se utilizan y verás que no solo están en las matemáticas, sino también en tu vida diaria.

Lupita se puso roja de vergüenza, pero su maestro la consoló diciendo que muchas personas no saben lo útiles que son.

El maestro de Lupita comenzó a mostrar algunas aplicaciones, que te presentamos aquí, desde las más cercanas a la geometría hasta las más cotidianas:

1. En un triángulo isósceles, como el de la figura 3.5, se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ por ser triángulo isósceles. ¿Podrías tú justificar, usando los criterios de congruencia, que $\triangle BAD \cong \triangle DCB$?

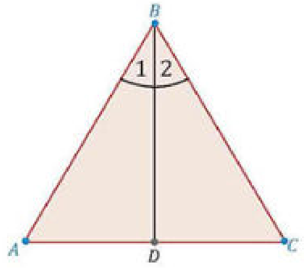


Figura 3.5

Se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$, además, el lado $\overline{DB}$ es común para ambos; luego, por el criterio de congruencia LAL, los triángulos $\triangle BAD \cong \triangle DCB$ son congruentes.

Como estos triángulos son congruentes, ellos tienen todos sus ángulos interiores homólogos iguales y todos sus lados iguales. Así, $\overline{AD} \cong \overline{DC}$, el ángulo en D es recto para ambos triángulos y además $\measuredangle BAD \cong \measuredangle DCB$.

2. Laura está construyendo un tangrama como el de la figura 3.6. Para ello, ha seguido los siguientes pasos:

Dibuja un cuadrado:

- Traza la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado $ABCD$ y una recta paralela a esta que una los puntos medios de los lados de triángulo ABC que quedó determinado por la diagonal. Esta recta se llamará $\overline{EF}$.

Tangrama: juego tradicional chino hecho de un cuadrado cortado en siete piezas (un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos) que pueden unirse para formar diferentes patrones.

- Traza la otra diagonal del cuadrado $ABCD$ hasta $\overline{EF}$ (la cual se llamará $\overline{DG}$). Acá, G es el punto medio del segmento $\overline{EF}$.
- Desde E y hasta el punto medio del segmento $\overline{AO}$ (punto que se llamará H, O es el punto donde se intersecan las diagonales del cuadrado $ABCD$), traza una paralela al segmento $\overline{DG}$.
- Desde G traza una línea paralela a $\overline{BC}$, este punto se llamará I.

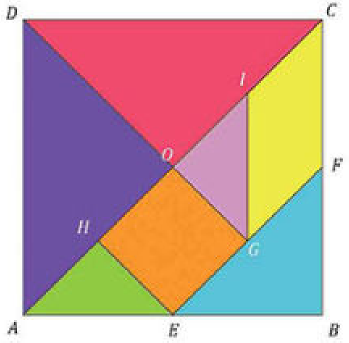


Figura 3.6

Cuando Laura lo vio se dio cuenta de que los triángulos AOD y CDO eran de igual forma y tamaño. ¿Puedes tú demostrar por qué?

Construyamos nuevamente la figura marcando ángulos y segmentos de igual medida para encontrar el criterio de congruencia que utilizaremos para demostrar que ambos triángulos son congruentes (figura 3.7):

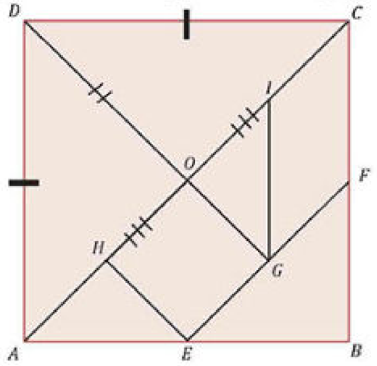


Figura 3.7

$\overline{AD}$ es congruente a $\overline{CD}$ por tratarse de lados del cuadrado $ABCD$; el lado $\overline{DO}$ es común para ambos y por construcción, $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$ son congruentes, pues O es el punto donde se intersecan las diagonales del cuadrado $ABCD$. Así, por el criterio LLL, los triángulos son congruentes.

3. Si Laura quiso que su tangrama fuera construido sobre un cuadrado de lado 20 cm, ¿cuál es el perímetro de cada una de las siete figuras obtenidas?

Calculemos la medida de las diagonales mayores. Para esto usaremos el teorema de Pitágoras, donde los catetos son los lados del cuadrado y la diagonal su hipotenusa:

$20^2 + 20^2 = d^2$

$400 + 400 = d^2$

$800 = d^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\sqrt{800} = d$

Esto es aproximadamente 28.28 cm.

Como las diagonales se dimidian (se cortan en la mitad) y se intersecan en ángulo recto, los catetos de los triángulos miden 14.14 cm. Por lo tanto, el perímetro de los triángulos mayores es $P = 14.14 + 14.14 + 20 = 48.28$ cm (recuerda que las figuras que son congruentes tendrán el mismo perímetro, pues sus lados homólogos miden lo mismo).

Para el triángulo mediano, sus catetos miden 10 cm. Calculemos su hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras:

$10^2 + 10^2 = d_1^{\,2}$

$100 + 100 = d_1^{\,2}$

$200 = d_1^{\,2} \qquad /\sqrt{\ }$

$\sqrt{200} = d_1$

Esto es, aproximadamente, 14.14 cm.

Por lo tanto, su perímetro será $P = 10 + 10 + 14.14 = 34.14$ cm.

Para los triángulos pequeños, se tiene que su hipotenusa es 10 cm. Entonces:

$x^2 + x^2 = 10^2$

$2x^2 = 100 \qquad /:2$

$x^2 = 50 \qquad /\sqrt{\ }$

$x = \sqrt{50}$

Esto es, aproximadamente, 7.07 cm.

Por lo tanto, el perímetro de los triángulos menores será $P = 10 + 7.07 + 7.07 = 24.14$ cm

Por último, el perímetro del cuadrado es, aproximadamente, $P = 4 \cdot 7.07 = 28.28$ cm, y el del paralelogramo, $P = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 7.07 = 34.14$ cm

4. El papá de Mariana y David los desafía a determinar cuál de los dos se demora menos en ir desde su casa, ubicada en el punto C del esquema de la figura 3.8, a la escuela, ubicada en el punto A del mismo esquema. Mariana comienza el recorrido desde el punto C, avanza hasta B, para llegar a la escuela ubicada en el punto A. David por su parte, realiza este recorrido desde el punto C hasta el punto D, y luego hasta el punto A. Si consideramos que ambos caminos pueden ser considerados como triángulos y que $\angle BCA \cong \angle DAC$ y $\angle CAB \cong ACD$. ¿Es posible afirmar que ambos recorrerán la misma distancia? Justifica.

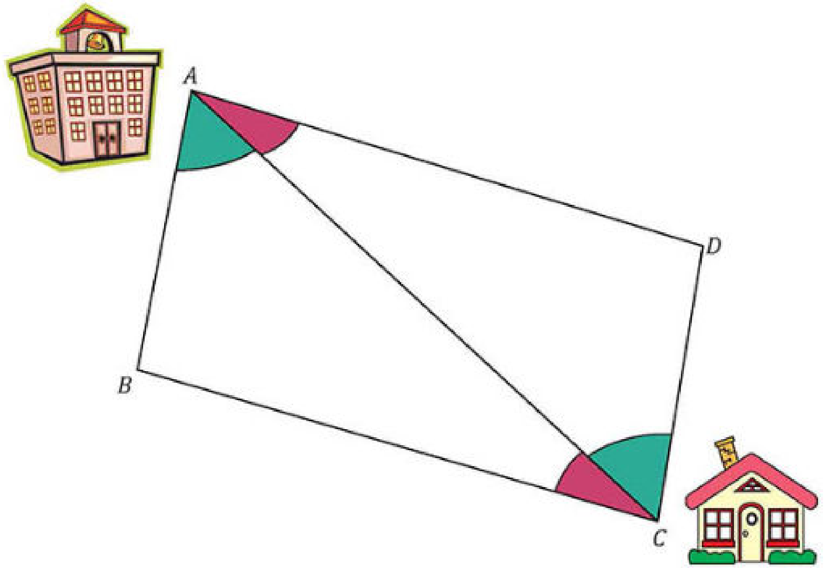


Figura 3.8

Según la información dada, ya sabemos que $\angle BCA \cong \angle DAC$ y $\angle CAB \cong ACD$, además, el lado $\overline{AC}$ es común para ambos triángulos, por lo que por el criterio ALA (ángulo-lado-ángulo) podemos afirmar que Mariana y David recorrerán la misma distancia para ir desde su casa a la escuela.

Habilidades a desarrollar: identificar – explicar.

1 En la figura 3.9, $\overline{FG}$ y $\overline{HI}$ se dimidian

a. Es posible asegurar que ambos triángulos son congruentes. ¿Qué criterio debe usarse para justificar dicha congruencia?

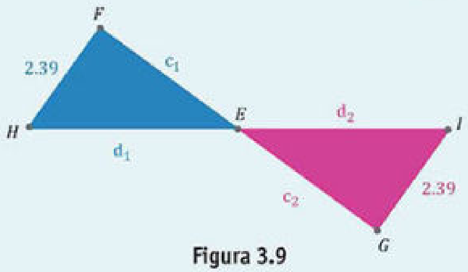


Figura 3.9

Aplicaciones de la semejanza de triángulos a la resolución de problemas

Tal como lo había dicho su maestro, Lupita ahora le encontraba un poco más de utilidad a las congruencias. Sin embargo, todavía le quedaban nuevas cosas por aprender.

En la clase siguiente su maestro les planteó estos nuevos ejercicios:

1. Tomás necesitaba medir la altura del árbol que estaba en el parque cerca de su casa. Su maestro les había dado la tarea de buscar un método sencillo para hacerlo. Tomás ocupó su propio cuerpo, que mide 1.75 m, y calculó la respuesta según la sombra que su cuerpo y el árbol daban, 1.2 m y 5 m, respectivamente.

   Tomás hizo un primer bosquejo (figura 3.10) para trazar su plan de acción. Observa:

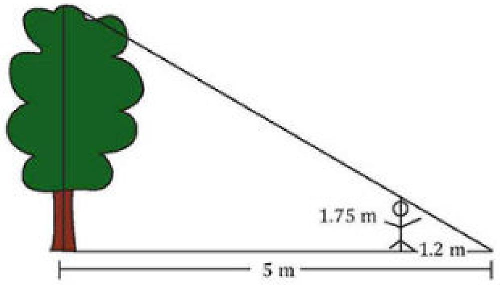


Figura 3.10

   Tomás dijo: "Si comparo el triángulo formado por mi cuerpo, la sombra de este y el rayo del sol con el triángulo formado por el árbol, su sombra y el rayo de sol, estos serán semejantes, pues tienen dos ángulos iguales: el que forma el rayo del sol con el suelo y el que formamos el árbol y yo con el suelo. Entonces, si los triángulos son semejantes, podré formar proporciones con sus lados y escribiré:

   $\frac{1.2}{5} = \frac{1.75}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \cdot 1.75}{1.2} = \frac{8.75}{1.2} \approx 7.29$

   Es decir, el árbol mide, aproximadamente, 7.29 metros".

2. Verónica ha investigado sobre los elementos secundarios de los triángulos y ha encontrado un teorema que dice que el centro de gravedad de un triángulo divide a cada una de sus transversales de gravedad en la razón 2 : 1. Cuando Verónica leyó esto no entendió mucho, aunque supuso que debiera ser importante, pues se trataba de un teorema muy nombrado en varios artículos y páginas webs.

Transversal de gravedad: trazo que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto.

3. ¿Se podría demostrar fácilmente? Veamos lo que hizo:

   Dibujamos un triángulo cualquiera, como el de la figura 3.11, y trazamos dos de sus transversales de gravedad

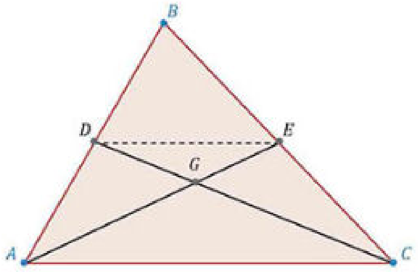


Figura 3.11

   Lo que se debe demostrar es que $\frac{\overline{GA}}{\overline{GE}} = \frac{2}{1}$.

   Si unimos los puntos D y E, tendremos que el trazo $\overline{DE}$ es una mediana del triángulo. Esta tiene por propiedad ser paralela al lado opuesto AC y medir la mitad de este.

   Si comparamos los triángulos ACG con EDG, notaremos que ellos son semejantes, pues tienen dos pares de ángulos congruentes: $\measuredangle DGE \cong \measuredangle CGA$ (opuestos por el vértice) y $\measuredangle GDE \cong \measuredangle GCA$ (ángulo entre paralelas).

   Si anotamos la semejanza de estos triángulos y las proporcionalidades de sus lados en el orden respectivo, tendremos:

   $\triangle AGC \sim \triangle EGD \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}}$

   Si tomamos la primera y la última razón, podemos anotar que:

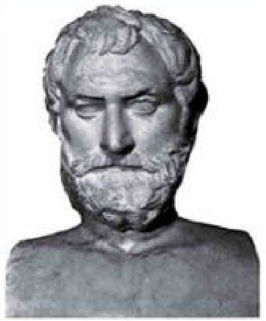
   $\frac{\overline{AG}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{EG}} = \frac{2\overline{ED}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$

   Que era lo que se quería demostrar.

Cuando el maestro de Lupita terminó la explicación de estos problemas, Lupita levantó su mano y le dijo a su maestro: "Entonces, casi cualquier cosa se puede medir a través de la semejanza si logramos formar triángulos que tengan algún lado paralelo". El maestro la felicitó y le contó que esto mismo había pensado un gran matemático que se llamaba Tales de Mileto. En su honor –les dijo el maestro a los alumnos de su clase– hay un teorema muy importante que es una aplicación de la semejanza de triángulos y que es muy útil en el momento que uno desea estimar algunas mediciones.

Mediana: trazo que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo.

Biografía



Tales de Mileto, nació alrededor del año 640 a.n.e. en Mileto, Asia Menor, y murió alrededor del año 560 a.n.e. en Mileto. La opinión antigua es unánime al considerar a Tales como un hombre excepcionalmente inteligente y como el primer filósofo griego, científico y matemático, que, sin embargo, actuaba como un ingeniero.

Teorema de Tales

Supongamos que se tiene un triángulo *ABC* cualquiera y que se traza una paralela a uno de sus lados, como muestra la figura 3.12:

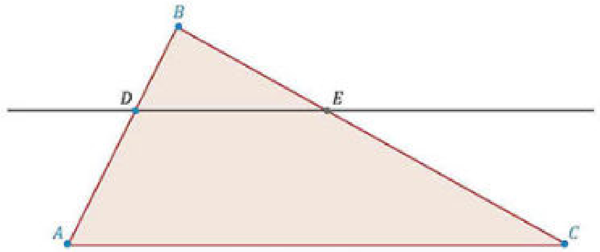


Figura 3.12

Como ya lo habrás notado, los triángulos *BDE* y *BAC* son semejantes, pues tienen dos pares de ángulos congruentes, ya que como

$\overline{DE} \,//\, \overline{AC}$, $\angle BED \cong \angle BCA$ y $\angle BDE \cong \angle BAC$.

Por lo tanto, $\triangle BDE \ \triangle BAC \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$

El teorema de Tales nos dice también que si los triángulos son semejantes, entonces los trazos $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ serán paralelos. Esto es sencillo de argumentar, ya que si se sabe que los triángulos son semejantes, entonces sus ángulos interiores homólogos serán iguales y, por lo tanto, las rectas serán paralelas (por estar estos ángulos entre rectas paralelas).

Ordenando un poco las proporciones anteriores, componiendo y descomponiéndolas, tendremos el teorema de Tales como es conocido comúnmente, observa la figura 3.13:

Si $L \,//\, M$, y $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ no paralelas, como en la figura:

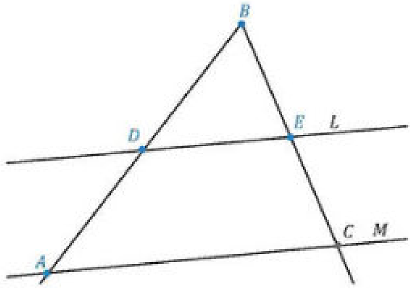


Figura 3.13

Se cumple que: $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$ $\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ y $\frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$

Veamos una aplicación geométrica de este teorema (figura 3.14). Determinaremos el valor de x si las rectas L y L' son paralelas.

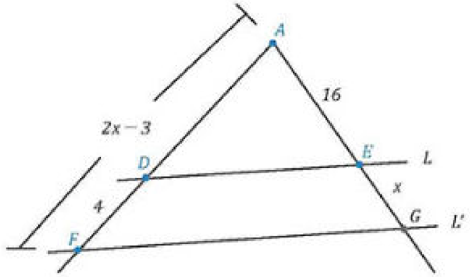


Figura 3.14

Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{2x-3}{4} = \frac{16+x}{x}$ *(multiplicando cruzado)*

$\Rightarrow x(2x-3) = 4(16+x)$

$2x^2 - 3x = 64 + 4x$ $\quad / -64 - 4x$

$2x^2 - 7x - 64 = 0$ *(aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática)*

$a = 2, \ \ b = -7$ y $c = -64$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -64}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 512}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{561}}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7 + \sqrt{561}}{4} \approx \frac{7 + 23.69}{4} \approx 7.67 \text{ y } x_2 = \frac{7 - \sqrt{561}}{4} \approx \frac{7 - 23.69}{4} \approx -4.17$$

Como x es la medida de un trazo, no puede ser negativa, entonces, el valor de x es 7.67

Miremos ahora la figura 3.15:

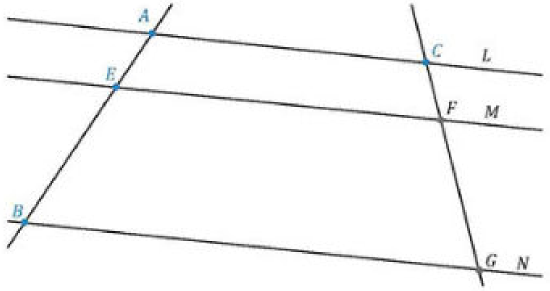


Figura 3.15

Antes de continuar con la lección, discute con dos compañeros las siguientes preguntas:

¿Se parece esta figura a la vista anteriormente? ¿Se cumplirán aquí ciertas proporciones al ser $L//M//N$? ¿Cómo demostrar esto?

Como las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ no son paralelas, entonces se cortarán en algún punto si prolongamos las rectas más allá de lo que muestra el dibujo. En ese caso, se tendrá una figura como la antes vista, donde se cumplirá el teorema de Tales. Entonces como el vértice superior de los triángulos semejantes que se forman no está dado explícitamente, las proporciones que se pueden escribir en este caso serán solo aquellas que tengan relación con los lados de los triángulos y no con las bases de ellos.

Este es un caso particular del teorema anterior y dice que:

Si dos transversales (de vértice inaccesible) son cortadas por tres o más paralelas, entonces los segmentos determinados por estas son proporcionales. Es decir, si $L // L' // L'' // L'''$ (figura 3.16), se tiene que:

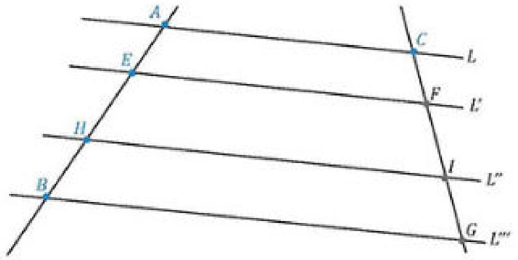


Figura 3.16

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FI}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{IG}},$ etcétera.

En general, se puede escribir cualquier proporción tomando dos de los trazos de una de las transversales y sus correspondientes trazos en la otra transversal.

Nota que los trazos de las rectas paralelas no son considerados en este caso, pues el punto donde se intersecan las transversales no es un dato dado.

Al igual que en el caso anterior, si en la situación vista las proporciones se cumplen, entonces las rectas serán paralelas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Aplica el teorema de Tales para encontrar los trazos proporcionales en la figura 3.17:

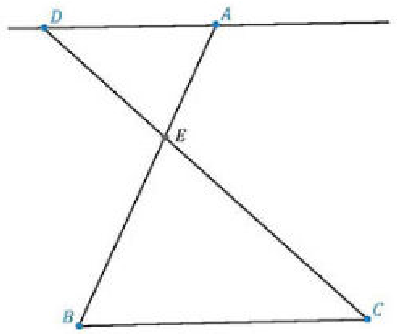


Figura 3.17

SOLUCIÓN

Procedimiento: Si $\overline{DA} // \overline{BC}$, nuevamente los triángulos serán semejantes, ya que al tener rectas paralelas, $\angle ADE \cong \angle ECB$ y $\angle DAE \cong \angle CBE$ (ángulos entre paralelas). Por lo tanto, podemos decir que $\triangle EAD \sim \triangle EBC$ y, entonces, podemos escribir las siguientes proporciones:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

Ordenando y componiendo las proporciones, podemos indicar el último caso del teorema de Tales:

Si $L // L'$, entonces en la figura 3.18 se pueden establecer las siguientes proporciones:

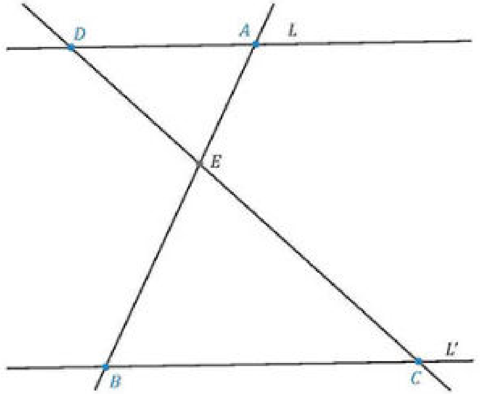


Figura 3.18

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}, \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}}, \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}, \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ y $\frac{\overline{DC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$

También aquí se cumple que si estas proporciones son verdaderas, entonces las rectas L y L' serán paralelas.

2. Se quiere medir el ancho de un río. Para esto, la persona encargada ha diseñado el siguiente plano con las medidas que ha tomado (figura 3.19):

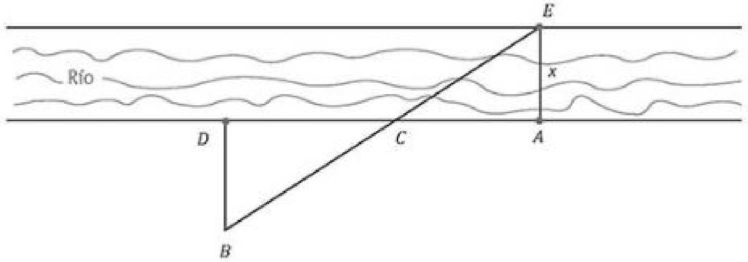


Figura 3.19

SOLUCIÓN

Procedimiento: La persona encargada desea medir la distancia desde E a A. Para esto, traza una línea desde B, de tal manera que si se pudiera continuar llegaría hasta E. De este modo, determina el punto C en el lado en que él se encuentra del río. Luego, dibuja un trazo paralelo al determinado por los puntos A y E. Él mide entonces, desde su lado del río, los segmentos $\overline{BD} = 4$ m, $\overline{DC} = 10$ m y $\overline{AC} = 8$ m.

Como ha dibujado los trazos $\overline{BD}$ y $\overline{EA}$ paralelos, entonces, por teorema de Tales, se tiene que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 8}{10} = \frac{32}{10} = 3.2$$

Es decir, el río mide, en esta parte, 3.2 metros.

3. En la figura 3.20, ¿será L paralela a L'?

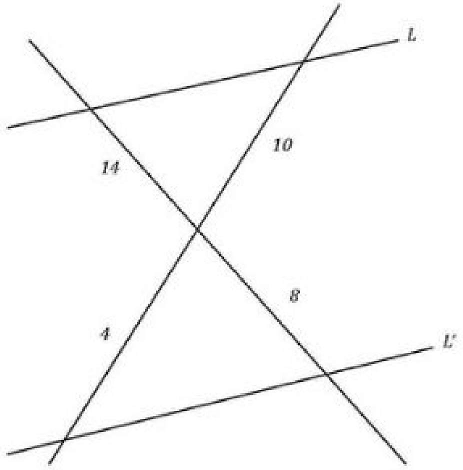


Figura 3.20

Si fueran paralelas, tendría que cumplirse el teorema de Tales. Escribamos las razones correspondientes y verifiquemos si forman o no una proporción:

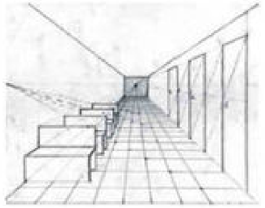
Debiera ser que: $\frac{14}{8} = \frac{10}{4}$, pero esto no es cierto, ya que si multiplicamos cruzado, $14 \cdot 4 \neq 8 \cdot 10$, por lo tanto, las rectas L y L' no son paralelas.

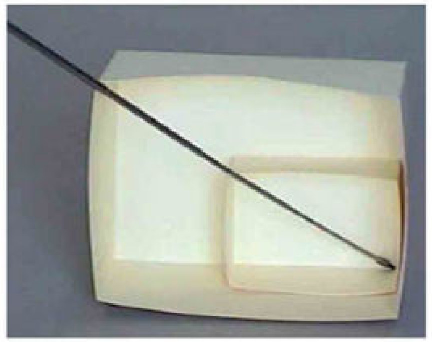
Te invitamos a revisar estas páginas webs que tienen más información sobre Tales y sus teoremas. Recuperadas, febrero 10, 2013, de:

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html
http://www.dad.uncu.edu.ar/upload/teorema-de-thales.pdf
http://revistasuma.es/IMG/pdf/4/027-037.pdf
http://www.bernardosouviron.com/2012/05/27/tales-de-mileto-el-sabio-misterioso/

Ahora sí que Lupita estaba impresionada. Nunca había pensado que solo con las semejanzas se podrían hacer tantas cosas útiles. Pero ella no imaginaba que aún le quedaban algunas bellas materias dentro de las matemáticas que descubrir.

La clase siguiente su maestro trajo algunos dibujos muy bonitos Observa.





Discute en parejas: ¿Qué es lo similar en estos dibujos?, ¿ves alguna figura semejante en ellos? Indícalas y verifica tu afirmación con tu maestro.

Homotecia

Diremos que una *Homotecia* es la transformación de una figura en otra, donde a partir de un punto fijo (llamado centro de homotecia), todas las distancias desde él a cualquier otro punto de la figura se multiplican por un mismo factor para formar el punto homotético de la otra figura.

Por ejemplo, tomemos el triángulo ABC de la figura 3.21, el centro de homotecia D y el factor $k = 1.5$. Para construir un triángulo homotético a ABC sigue los pasos que te detallamos a continuación:

1°: Une el centro de homotecia con el vértice B, mediante una recta.

2°: Mide la distancia de D a B.

3°: Multiplica dicha distancia por el factor k dado.

4°: Mide desde D, sobre la recta trazada en el primer paso, la distancia dada como resultado de la multiplicación anterior. Marca el punto B' (homotético de B).

5°: Repite lo hecho con cada uno de los vértices restantes.

Observa:

Para el vértice B:

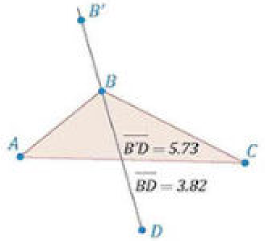


Figura 3.21

Ahora, en la figura 3.22, lo hacemos para todos los vértices.

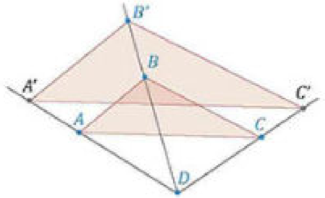


Figura 3.22

Observa que para los triángulos DBA y $DB'A'$ se tiene que

$$\overline{DA'} = 1.5 \cdot \overline{DA} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}} = \frac{3}{2}, \quad \overline{DB'} = 1.5 \cdot \overline{DB} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = \frac{3}{2}$$

y además, el ángulo ADB es común para ambos triángulos. Así, por el criterio de semejanza LAL, se tiene que los triángulos $DB'A'$ y DBA son semejantes de razón $\frac{3}{2}$. De esto se desprende que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ están en razón $\frac{3}{2}$. Si seguimos este análisis para cada uno de los lados del triángulo ABC, tendremos que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{3}{2}$. Esto hace que los triángulos ABC y $A'B'C'$ sean semejantes (criterio LLL, tres pares de lados proporcionales).

Entonces, cada vez que se construye una figura homotética a otra, ambas, la original con su homotética, son semejantes, de razón de semejanza igual a la razón de homotecia.

Lupita pensó y pensó, luego le dijo a su maestro: "Si la razón de homotecia es mayor que 1, la figura homotética será más grande, pues la distancia entre el centro de homotecia y los vértices homotéticos será mayor que la que hay entre el centro de homotecia y el vértice homólogo original, ya que estamos multiplicando por un número mayor que 1, así que el resultado es siempre mayor"

Efectivamente, Lupita tenía razón. ¿Y si la razón de homotecia es positiva y menor que 1, qué sucede con la figura homotética?

Tal como lo has pensado, en ese caso la figura homotética es de menor tamaño. Hagamos un ejemplo. Tomemos un cuadrado $ABCD$ y el centro de homotecia H, con razón de homotecia $\frac{1}{5}$ (es decir, 0.2). Construyamos la figura 3.23 homotética del cuadrado.

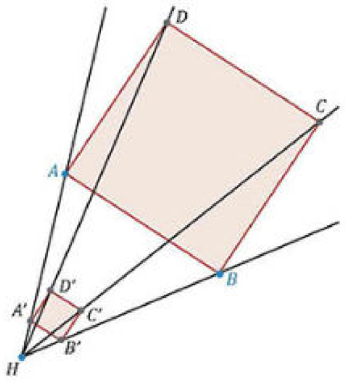


Figura 3.23

- ¿Existirá una homotecia de razón negativa? ¿Qué pasaría con la figura homotética?

Pensemos un poco en el desplazamiento de una persona. Si decimos que camina hacia el sur 2 km y lo representamos con el número 2, ¿cómo lo representaríamos si se desplaza 2 km hacia el norte? Efectivamente, debiéramos representarlo con el número −2 para considerar de alguna forma el sentido del movimiento. De esta misma manera entenderemos una homotecia de razón negativa. Observa.

Como se habrán fijado, en las construcciones que acabamos de hacer proyectamos siempre los nuevos vértices en el mismo sentido de los trazos que unen los vértices de la figura original con el centro de homotecia. En el caso que la razón sea negativa, los proyectaremos en sentido contrario. Tomemos el ejemplo del cuadrado, pero esta vez la razón de homotecia será $-\frac{1}{5}$. Entonces, hacemos la misma construcción (multiplicando por el factor 0.2), pero copiamos la distancia en sentido contrario al vértice sobre la recta que lo une al centro de homotecia.

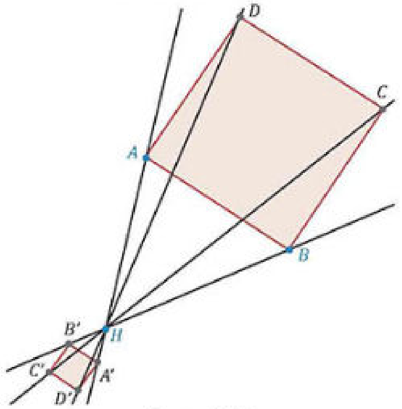


Figura 3.24

Si te fijas bien, la figura homotética 3.24 resulta invertida.

- ¿Qué crees que ocurrirá si la razón de homotecia es 1? ¿Qué tipo de figuras se obtendrán?
- ¿De igual forma que pasará si la razón de homotecia es -1?

Comprueba ambos casos mediante una construcción e indica a qué transformación isométrica corresponde.

- ¿Qué sucede si el centro de homotecia está dentro de la figura o en uno de sus vértices o en uno de sus lados, como lo ilustran las figuras 3.25 a, b y c? Aquí te mostramos lo que sucede en estos casos con una figura cualquiera, con centro de homotecia H y razón de homotecia igual a $\frac{6}{5}$ (es decir, 1.2).

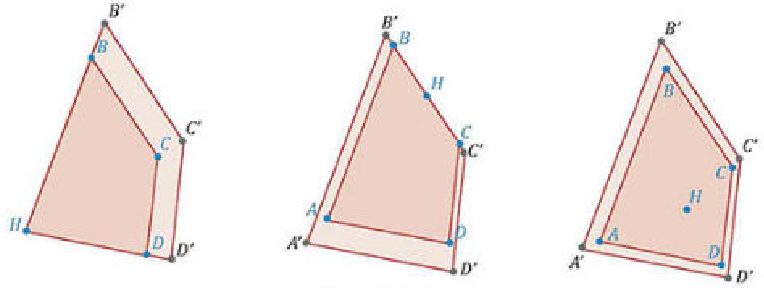


Figura 3.25 a

- ¿Y si la razón fuera -1.2?

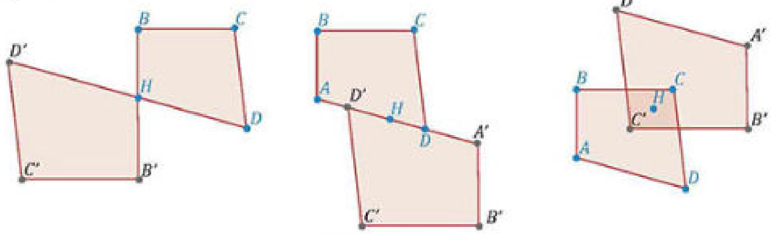


Figura 3.25 b

Sabías que...

En Astronomía los estudiantes utilizan un aparato llamado tubo negro para realizar diferentes experimentos. Por ejemplo, sabiendo que la distancia desde la Tierra hasta el Sol es de 149,1 millones de kilómetros, para estimar el diámetro solar se coloca el tubo sobre un trípode y se orienta hacia el Sol. Se mide con un calibrador el diámetro del disco proyectado sobre el papel y se establece el diámetro solar mediante la proporción.

- ¿Y si la razón fuera 0.6?

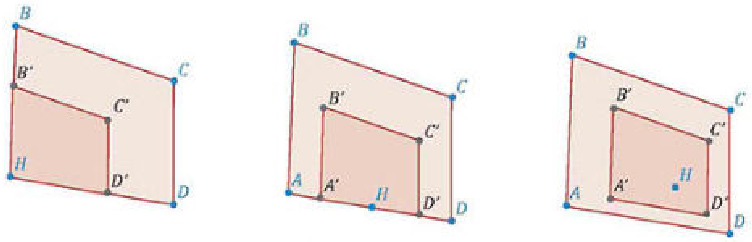


Figura 3.25 c

Si quieres saber más sobre homotecias, te invitamos a entrar en los links. Recuperados, febrero 15, 2013, de:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html
http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__4cef5e15-c84f-11e0-820a-e7f760fda940/index.htm

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentra la razón y centro de homotecia de la figura 3.26, sabiendo que A es la figura original y B su homotética.

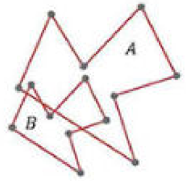


Figura 3.26

SOLUCIÓN

Procedimiento: Como la figura no está invertida, la razón de homotecia es positiva, y como la figura homotética es más pequeña que la original, la razón será menor que 1. Para determinarla se debe calcular la razón entre uno de los lados de A y su homólogo en B. El centro de homotecia se encontrará uniendo los vértices homólogos por rectas y encontrando el punto de intersección de estas rectas (figura 3.27).

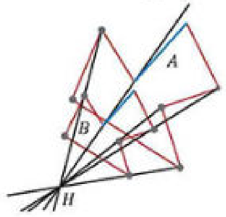


Figura 3.27

Al medir los trazos en azul, el de la figura A mide 1.6 y el de la figura B. Por lo tanto, la razón de homotecia será

$$r = \frac{1}{1.66} = 0.625$$

2. A un trazo $\overline{AB}$ que mide 6 cm se le aplicará una homotecia de razón $r = -3$. ¿Cuál es la medida del trazo homotético a este?

Que la razón sea igual a -3 indica que el trazo homotético estará invertido y en sentido contrario al original. Sin embargo, para efectos de medida, el signo de la razón no afecta el resultado. Entonces tendremos que $\overline{A'B'} = 3 \cdot \overline{AB} = 3 \cdot 6 = 18$ cm

Y para finalizar...

La figura 3.28 representa una parte lateral de una alberca, la cual tiene 2.5 m de ancho. Con base en la información de la figura, contesta:

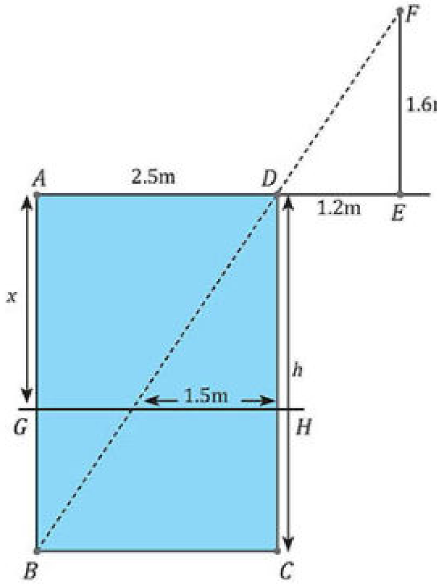


Figura 3.28

¿Qué profundidad h tiene la alberca? ¿A qué altura se encuentra un guardavida que está ubicado en un asiento que se encuentra en el punto F?

Se desea construir otra alberca, para niños, cuya profundidad sea menor. Para determinar la profundidad de esta alberca, en el plano de esta nueva construcción se traza una recta imaginaria $\overline{GH}$, ¿cuál es la profundidad x de la alberca que se construirá?

Supón que se realiza una homotecia negativa con centro en el punto D, realiza el dibujo de esta homotecia y determina la razón de homotecia, si las longitudes obtenidas son las mismas que las del triángulo DEF.

Más que...

¿Existe homotecia? No. Aunque parezca que las personas son homotéticas, solo es un efecto visual de las líneas trazadas en el fondo de ellas. Si dibujas rectas que unan los puntos de sus rodillas y sus cabezas, te darás cuenta que no coinciden en un punto, por lo tanto, no hay centro de homotecia.

Comprueba tus conocimientos Tema 2

I. Completa las siguientes proposiciones con la información correcta según corresponda.

1 Un ejemplo de la aplicación de la congruencia entre triángulos es ____________
____
____

2 El teorema de ____________ es una aplicación de semejanzas de triángulos.

3 En cada uno de los tres tipos de casos de que trata el teorema de Tales se requiere que estén presentes por lo menos un par de rectas que sean ____________ y otro par de rectas que las atraviesen.

4 Una homotecia es la transformación de una figura en otra, donde, a partir de un punto fijo denominado ____________
____________, cada distancia desde este punto a cualquier otro punto de la figura se multiplica por un mismo factor llamado ____________ para así obtener la posición del punto homólogo de la figura resultante.

5 Para que una figura homotética de otra sea equivalente a una operación de simetría central sobre esta otra, el valor de la razón de homotecia debe ser igual a ____________
____________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 En la figura 3.29, $ABA'B'$ es un paralelogramo y C, D, E, F y E' son puntos medios.

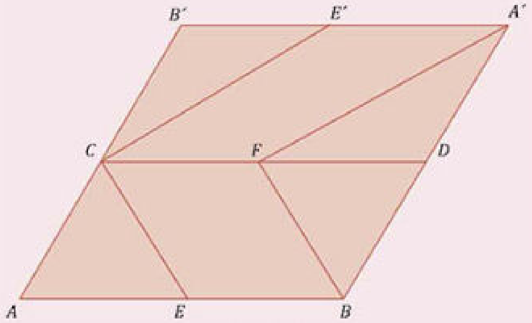


Figura 3.29

a. Encuentra algún triángulo que sea congruente con $\triangle CAE$. Justifica usando un criterio de congruencia.

b. ¿Es $\overline{A'F}$ es congruente con $\overline{E'C}$? Justifica tu respuesta.

2 Dibuja dos triángulos rectángulos que sean semejantes. Traza en cada uno de ellos la altura, cuyo pie descansa en la hipotenusa respectiva, y además el segmento que une el vértice donde se ubica el ángulo recto hasta el punto medio otra vez de cada hipotenusa. Así, en cada triángulo se han formado otros tres menores. ¿Se han formado nuevamente pares de triángulos semejantes? ¿Por qué?

3 El $\triangle ABC$ de la figura 3.30 es rectángulo, con $\overline{AB} = 6$ cm y $\overline{AC} = 8$ cm. E y D son los puntos medios de los lados respectivos; G es el punto medio de $\overline{AE}$ y F el de $\overline{AD}$.

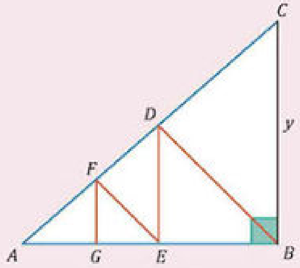


Figura 3.30

a. ¿Por qué podemos asegurar que $\overline{BC}$, $\overline{ED}$ y $\overline{GF}$ son paralelos?

b. Al igual que en **b.**, ¿se puede afirmar lo mismo respecto de $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$? ¿Por qué?

c. Determina el valor de y.

d. ¿Cuáles son los valores de $\overline{DE}$ y $\overline{BD}$?

e. ¿Cuál es la longitud de la línea quebrada en rojo?

4 En la figura 3.31, las rectas azules son paralelas pero las rectas S_1 y S_2 no lo son. Todas las medidas están dadas en mm.

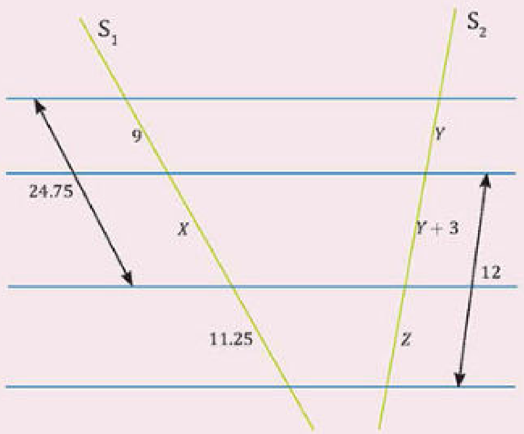


Figura 3.31

a. Escribe una proporción que relacione las incógnitas X e Y.

b. Establece una relación en que aparezcan las tres incógnitas X, Y y Z.

c. ¿Cuánto vale X?

d. Determina el valor de Y y Z.

e. Escribe las medidas de todos los trazos que faltan.

5 En la figura 3.32 hay dos segmentos que son paralelos y las medidas de los trazos están en cm.

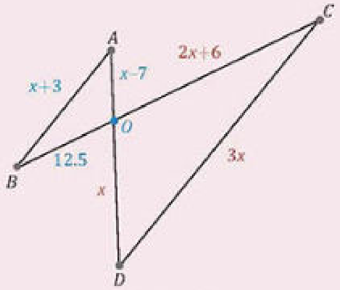


Figura 3.32

a. Aplicando el teorema de Tales, escribe un par de proporciones que pueden establecerse.

b. Determina el valor de x.

c. ¿Cuánto vale el perímetro de cada triángulo?

d. Indica dónde debiera ubicarse el centro de una homotecia para que el triángulo menor sea homotético del mayor.

e. ¿Cuánto debiera ser el valor de la razón de tal homotecia?

6 La figura 3.33, muestra al cuadrilátero $ABCD$, y además, se ha destacado dos puntos interiores: E es el centro de una homotecia, y C' un extremo de un cuadrilátero homotético.

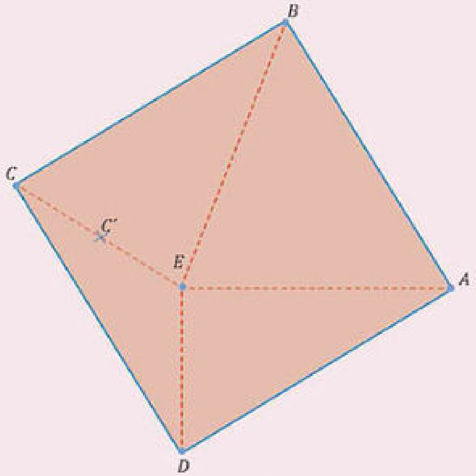


Figura 3.33

a. Si $\overline{CC'} = \overline{C'E}$. ¿Cuánto es la razón de esta homotecia?

b. Dibuja el cuadrilátero homotético correspondiente.

c. Dado que $\overline{BC} = 9.43$, ¿cuál es el valor de $\overline{B'C'}$?

d. Si la razón de homotecia se cambia por 1,25, entonces el cuadrilátero resultante es mayor que el original ¿Por qué?

e. Con la razón anterior, determina la longitud del trazo homólogo a $\overline{BC}$.

7 Valerio y Asunción. Miran nuevamente el siguiente bosquejo del sitio, representado en la figura 3.34, donde un grupo de jóvenes desapareció sin aún grandes explicaciones y que es motivo de su investigación.

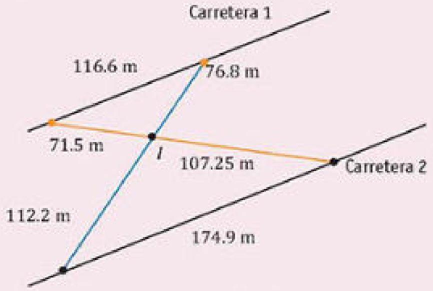


Figura 3.34

¡Ah! Estas son las dos carreteras paralelas que se unen entre sí por los puentes – indica Asunción. Además que, estos puentes se intersectan y que los jóvenes atravesaron haciendo el camino más corto usando parte de estos puentes cruzados, pero no tenemos más que esta información de distancias, – aunque sospecho que la medida 76.8 m no es correcta – agrega Valerio.

Conforme al relato, responde:

a. ¡Ah! Estas son las dos carreteras paralelas que se unen entre sí por los puentes -¿Estás de acuerdo con esta afirmación acerca de este paralelismo? Justifica su respuesta.

b. - ...el camino más corto usando parte de estos puentes cruzados – ¿cuál es la medida de este camino aludido dando crédito a la sospecha de Valerio?

8 ¡Mariela es paisajista y está trabajando en un jardín. Para ello, debe dibujar las figuras homotéticas de cada una de las formas de la figura 3.35 según las instrucciones que se detallan a continuación. ¿Cómo quedará su jardín?

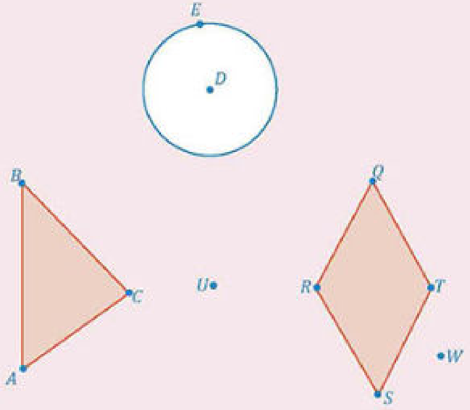


Figura 3.35

a. Homotecia del triángulo ABC con centro en A y razón -2.

b. Homotecia del cuadrilátero con centro en W y razón $\frac{2}{3}$

c. Homotecia de la circunferencia con centro en U y razón $-\frac{1}{3}$

d. Crea otras homotecias, con otras figuras.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
¿Puedo usar los criterios de congruencia de triángulos para argumentar o demostrar cuándo dos triángulos son congruentes?			
¿Puedo usar los criterios de semejanza de triángulos para argumentar o demostrar cuándo dos triángulos son semejantes?			
¿Puedo explicar el teorema de Tales en sus tres casos?			
¿Puedo explicar cuándo dos figuras son homotéticas?			
¿Puedo construir dos figuras homotéticas?			

Si hay contenidos o ejercicios que no domines aún, pide ayuda a tus compañeros o a tus maestros en el refuerzo de estos contenidos.

Proporcionalidad y funciones

Estudiarás en este tema

- Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Lee atentamente:
Los países no utilizan la misma escala para medir la temperatura. En México se utilizan los grados Centígrados (°C); en el país vecino del Norte utilizan los grados Fahrenheit (°F). La gráfica de la figura 3.36 modela esta relación:

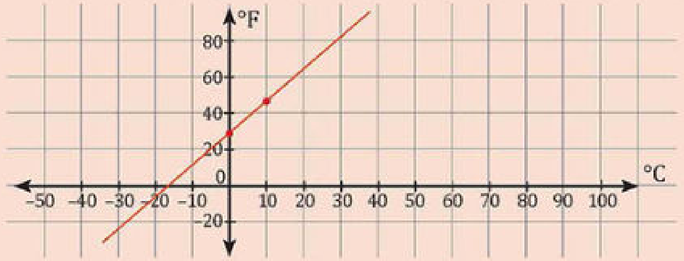


Figura 3.36

Los 0 °C corresponden a 32 °F; asimismo, 0 °F corresponden a – 18 °C aproximadamente.

Y para comenzar...

1. ¿Es esta variación de tipo proporcional? Explica.
2. Otra escala de temperatura, utilizada en el Sistema Internacional de Unidades, es el kelvin, cuya relación con los grados Centígrados es:

$$T = T_c + 273.15$$

Donde T_c es la temperatura en grados Centígrados, y T la temperatura en kelvin. Grafica esta relación y determina qué tipo de variación existe entre ambas escalas.

Para repasar los contenidos ya aprendidos, responde:
En parejas, observen las gráficas de la figura 3.37, discutan y justifiquen a qué tipo de variación corresponden:

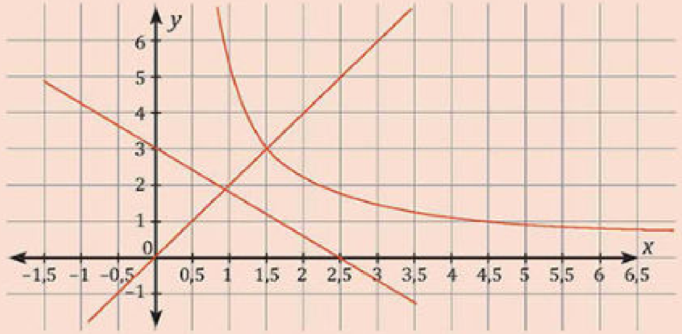


Figura 3.37

A continuación aprenderás a leer y a construir gráficas que modelan distintos fenómenos y situaciones, pero para ello debes conocer y saber aplicar muy bien los contenidos ya estudiados sobre proporcionalidad y funciones.

Función cuadrática

–Yo sé algo de funciones cuadráticas –dijo Gonzalo–. Son del tipo $y = ax^2 + c$, como lo estudiamos anteriormente.

–Cierto –dijo su maestra–, esas son uno de los tipos de funciones cuadráticas, pero si te acuerdas, Gonzalo, hemos estudiado también que una expresión cuadrática, en general, puede ser del tipo $ax^2 + bx + c$. Entonces, dime tú, ¿habrá funciones cuadráticas del tipo $y = ax^2 + bx + c$?

–Mmm, yo creo que sí, pero entonces, ¿cómo podríamos describir en forma general una función cuadrática?

Su maestra se sonrió y comenzó a explicarles lo siguiente:

Llamaremos ***Función cuadrática*** a toda función del tipo $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Al gráfico de esta función se le llama *parábola*. A a y b se les llama coeficientes numéricos de x^2 y x, respectivamente. A c se le llama término libre.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El gerente de la empresa donde trabaja Viviana le ha encargado hacer una presentación donde debe dar a conocer las utilidades que la empresa ha tenido en relación con el número de artículos producidos. Para ello ha confeccionado la gráfica de la figura 3.38:

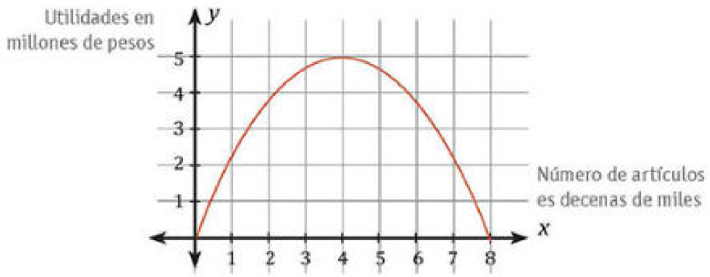


Figura 3.38

- ¿Qué información nos entrega este gráfico? ¿Qué debiera decir Viviana en su presentación?

SOLUCIÓN
Procedimiento: Esta gráfica nos entrega información diversa, por ejemplo:

Las utilidades aumentan a medida que se producen más artículos hasta las 40 000 unidades (recuerda que la cantidad en el eje x está representada en decenas de miles de artículos); después de los 40 000, las ganancias comienzan a descender. Una de las posibles causas puede ser el desgaste de las máquinas con que se fabrican.

La mayor utilidad obtenida es de 5 millones de pesos cuando se producen 40 000 artículos. Claramente, a esta empresa le conviene mantener este nivel de producción.

No hay utilidades cuando se producen 0 artículos, obvio, pero tampoco las hay cuando se producen 80 000 artículos, lo que se puede deber a que los costos de producción por desgaste de la maquinaria u otros factores son iguales a los de venta. Esto hace que las utilidades sean nulas.

2. Grafica la siguiente función: $y = x^2 - 4x + 3$.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Para graficar esta función, en primer lugar debemos determinar algunos puntos:

x	y
0	3
1	0
2	–1
3	0
4	3

A continuación, ubicamos los puntos determinados en el plano cartesiano y los unimos mediante una línea curva o parábola (figura 3.39):

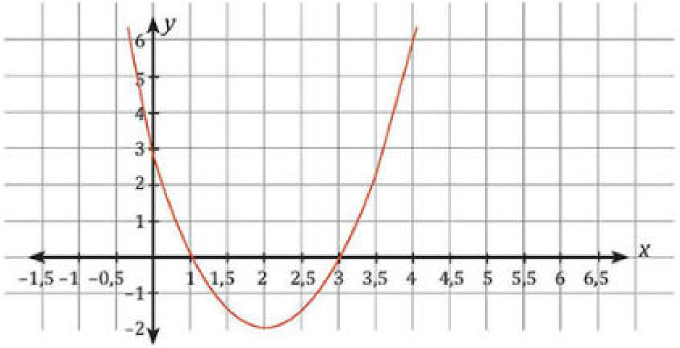


Figura 3.39

Habilidades a desarrollar: predecir – inferir.

1 En un cierto poblado se decide registrar la temperatura diaria a partir de las 00:00 h hasta las 24:00 h, durante un mes. La función que ajusta mejor la información promedio es $T = -0.3x^2 + 7x + 2$ y su gráfica es (figura 3.40):

a. ¿A qué hora se produce la temperatura máxima?

b. ¿Cuál es dicho valor?

c. Haz una estimación de la temperatura a las 10:00 h.

d. Estima el horario en que la temperatura no supera los 30 °C.

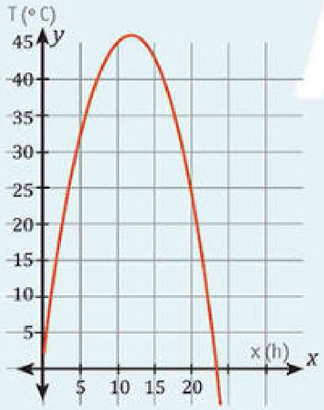


Figura 3.40

Otras representaciones gráficas

Pensemos juntos ahora en lo siguiente. En física ya has estudiado algunos movimientos y sus gráficas. Por ejemplo, observa la gráfica de la figura 3.41, que representa el desplazamiento rectilíneo de un automóvil en relación con el tiempo empleado.

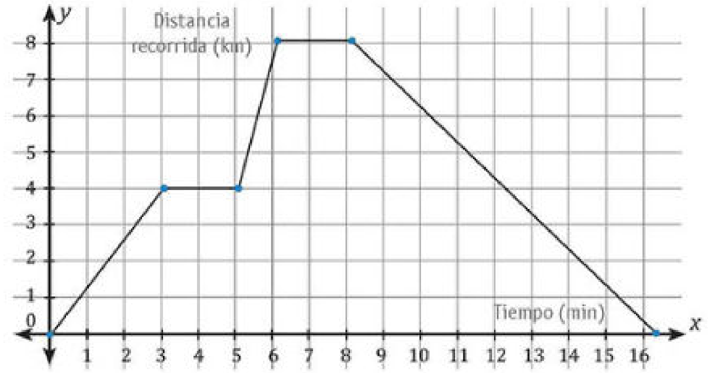


Figura 3.41

- ¿Qué puedes decir del movimiento del automóvil? ¿Estuvo detenido en algún momento? ¿Cuántos kilómetros recorrió en total? ¿Qué tipo de movimiento es este?

Lo primero que hay que decir acerca del gráfico es que está formado por varios tramos que son segmentos de rectas distintos. A este tipo de gráficas se les llama "gráficas por tramos".

Como cada recta representa el desplazamiento, podemos decir que el automóvil se desplazó 4 km en los tres primeros minutos. Luego se mantuvo detenido (segmento paralelo al eje del tiempo) por dos minutos para recorrer después 4 km más en 1 minuto. Nuevamente, vuelve a detenerse por 2 minutos y, por último, recorre 8 km en 8 minutos.

Con respecto al tipo de movimiento, el vehículo no mantiene el mismo durante todo el tiempo, pero sí podemos analizarlo por tramos. En los tramos entre los 0 y 3 minutos, entre los 5 y 6 minutos y entre los 8 y 16 minutos su movimiento es uniforme, y en el resto de los tramos se mantiene en reposo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El profesor de física de Margarita ha salido de su casa para hacer su caminata matutina. Mientras caminaba, contaba los pasos y el tiempo empleado, llegando a la conclusión de que realizó durante los primeros 4 minutos un movimiento uniforme descrito por la función $d = \frac{3}{2}t$, donde d es la distancia recorrida en metros y t el tiempo empleado en segundos. Luego, viendo que estaba algo atrasado, cambió su movimiento a uno acelerado descrito por la función $d = 0.8t^2 - 6.4t + 18.8$. ¿Cómo sería la gráfica de la caminata del profesor de Margarita?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Ya te habrás dado cuenta de que en este problema hay involucrados dos movimientos distintos y, por lo tanto, su gráfica será por tramos. Primero, hagamos una representación del movimiento en el tramo entre los 0 y 4 segundos. Como su representación algebraica es del tipo $y = ax$, su gráfica será una recta que pasa por el origen. Solo necesitaremos entonces dos puntos (reemplazamos el valor de t que elegimos en la función $d = \frac{3}{2}t$ para obtener d).

t	d
0	0
4	6

El segundo movimiento está descrito por una función cuadrática, es decir, su representación gráfica será una parábola. Como el movimiento comienza a los 4 segundos, hagamos una representación tabular desde ese valor hacia adelante. Tomemos 4 valores para t y reemplacémoslos en $d = 0.8t^2 - 6.4t + 18.8$ para calcular d.

t	d
4	6
5	6.8
6	9.2
7	13.2

Construyamos el gráfico. Primero colocamos los puntos de ambas tablas. Luego unimos el primer tramo por una recta y el segundo por una parábola (figura 3.42).

Sabías que...

En la vida diaria los gráficos nos ayudan a comprender diversas relaciones entre variables. Por ejemplo, en el periódico, en la sección de economía, verás gráficos sobre la evolución del costo de la vida a través del tiempo; también en salud te encuentras con los supuestos efectos de una determinada dieta para perder peso, etcétera. Son numerosos los ejemplos de aplicación, y solo basta con hojear un periódico para darse cuenta de la enorme cantidad de gráficos que se utilizan cotidianamente.

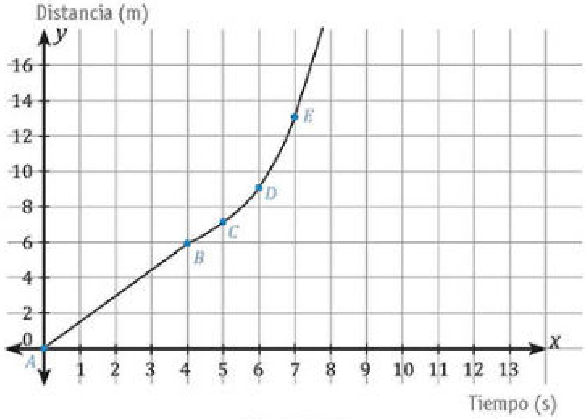


Figura 3.42

2. Supongamos que Pilar debe llenar distintos recipientes, como los que se muestran en la figura 3.43, utilizando un grifo que entrega agua a una velocidad constante:

Figura 3.43

¿Cómo serán sus gráficas?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Ella nota que la altura de llenado del agua, en el recipiente **a.**, es la misma conforme pasen los segundos, ya que la superficie es siempre la misma (es un cilindro recto). Por lo tanto, si hacemos un gráfico tiempo versus altura del agua (figura 3.44), este será una recta.

Para el recipiente **b.**, en cambio, la gráfica no será recta, pues como la superficie cambia de menor a mayor, el nivel de llenado va de más a menos segundo a segundo; entonces, el gráfico será una curva. Lo mismo sucede con el recipiente **c.**, siguiendo una variación inversa al de **b**. Observa los siguientes gráficos:

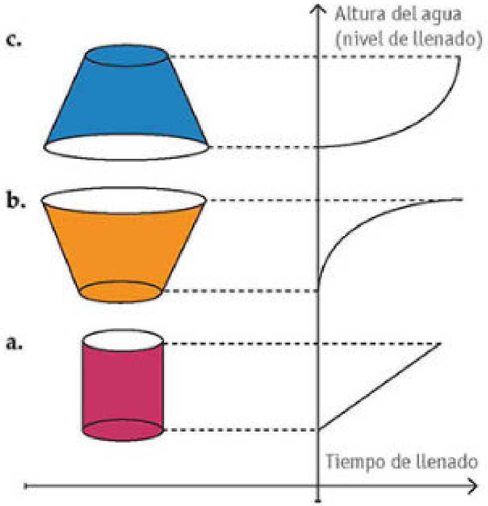


Figura 3.44

3. En una planta faenadora de animales se cuenta con un estanque cilíndrico que tiene una solución especial para lavar y desinfectar alguna de las herramientas con las que se trabaja. El encargado de esta solución es el ingeniero químico Sr. Benítez. Esa mañana, Óscar entra a la oficina del señor Benítez y ve en su mural un gráfico que llama mucho su atención (figura 3.45).

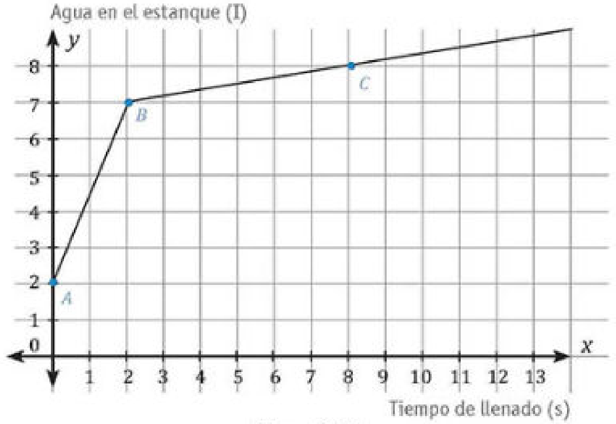


Figura 3.45

Óscar lo miró detenidamente e hizo una muy buena interpretación del gráfico. ¿Puedes tú interpretarlo? ¿Qué pasa con el llenado en los distintos tramos? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Interpreta tú este gráfico a partir de las siguientes preguntas:

Como el gráfico es por tramos, ¿qué ocurre con la velocidad de llenado durante todo el tiempo? ¿Es constante o varía? ¿Cuántos litros de agua había inicialmente en el estanque? ¿En cuántos segundos se agregan 5 litros de agua? Luego de esto, ¿la velocidad de llenado aumentó o disminuyó? ¿Cuál es su valor en litros por segundos? Entrega una posible razón, justificándola, para que esta velocidad cambiara.

Para averiguar un poco más de este tema te dejamos aquí un link. Recuperado, febrero 21, 2013, de:
http://genesis.uag.mx/edmedia/material/fisica/movimiento2.htm

Y para finalizar...

Imagina una situación que describa la gráfica de la figura 3.46, y enúnciala. Luego, en una puesta en común escojan a cinco compañeros quienes deben narrar, explicar y justificar la situación enunciada.

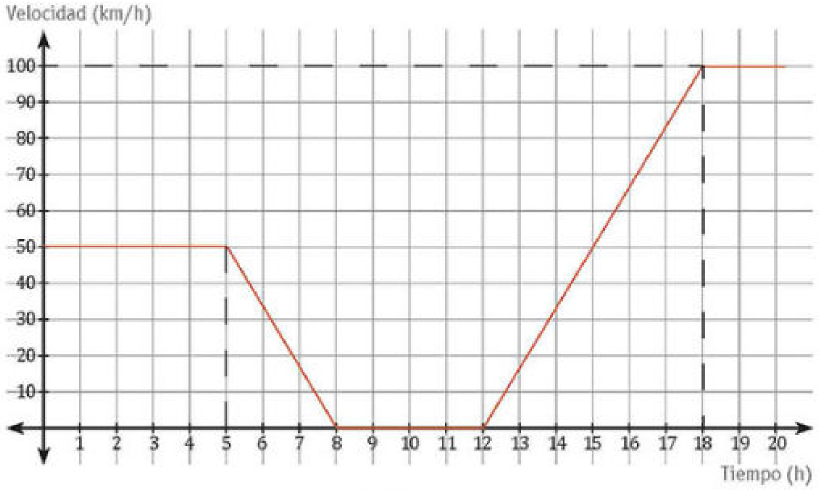


Figura 3.46

Comprueba tus conocimientos Tema 3

I. Determina si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas colocando V o F según corresponda. Justifica las falsas.

1 ___ Una gráfica por tramos está formada por secciones de segmentos de rectas, parábolas, etcétera.

2 ___ Las funciones cuadráticas solo sirven para modelar problemas de movimientos físicos.

3 ___ Un gráfico que modele una determinada situación puede estar formado solo por una recta o solo por una parábola u otra curva.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Dada las siguientes funciones:

i. $f(x) = 2x^2 - 5x - 4$

ii. $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$

iii. $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$

a. Haz una grafica de cada una de ellas.

b. Indica algún ejemplo de la física que hayas estudiado en que se aplique este tipo de modelamiento.

2 Los recipientes de la figura 3.47 deben ser llenados en su totalidad.

Figura 3.47

a. Dibuja las tres figuras básicas del llenado de recipientes que has estudiado en esta sección. ¿Cuál corresponde a cada recipiente de la figura?

b. Supongamos que todos tienen el mismo volumen. Estima aquel que debiera ser más rápido para ser llenado. Justifica tu respuesta.

3 "Hace sesenta años éramos alrededor de unos cuarenta habitantes. Desde esa época comenzaron a llegar paulatinamente personas a vivir aquí. Veinte años más tarde éramos unos setenta, como mucho. De allí nos mantuvimos hasta que a partir de los diez años siguientes empezaron a llegar más personas. Recuerdo que llegamos a ser como 90, y nos mantuvimos más o menos igual hasta que hace diez años se fueron 38 personas. Lamentablemente, no puedo recordar la cantidad de habitantes que somos en la actualidad".

Supón que la relación entre el número de habitantes y el año está modelado por una gráfica de secciones rectas, como la que se muestra en la figura 3.48:

Figura 3.48

Basándote en el relato y la gráfica, responde.

a. ¿Qué tipo de modelamiento está presente en el gráfico anterior?

b. ¿Cuánto habitantes hay en la actualidad?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de interpretar un gráfico dado en un problema.			
Soy capaz de construir un gráfico dados los datos de un problema.			
Entendí los ejercicios resueltos.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			

Si hay contenidos o ejercicios que no domines aún, pide ayuda a tus compañeros o a tus maestros.

Nociones de probabilidad

Estudiarás en este tema

- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

En grupos de tres integrantes, realicen la siguiente actividad:
Se tiene un dado blanco y otro dado negro, con sus caras marcadas con puntos del uno al seis. Se realiza un experimento que consiste en lanzar los dos dados simultáneamente. Los posibles resultados del experimento son parejas de números en los cuales el primero es el número de puntos del dado blanco y el segundo del dado negro.

Completen la siguiente tabla con los resultados anteriores:

		Dado negro					
		1	2	3	4	5	6
Dado blanco	1	(1,1)				(1,5)	
	2						
	3						
	4						
	5			(5,3)			
	6						(6,6)

Y para comenzar...

1. ¿Cuántos resultados posibles tiene el experimento? Calculen la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos.

2. ¿Dependerá del resultado obtenido al lanzar el dado blanco lo que se obtenga al lanzar el dado negro?

A continuación, completen la siguiente tabla:

Evento	Resultados Posibles	Probabilidad	Explicación
A {La suma es número primo}			
B {La suma es número impar}	18	$\frac{1}{2}$	Dado que la mitad de los números sumados obtenidos son impares, la probabilidad debe corresponder a $\frac{1}{2}$.
C {La suma es mayor que nueve}			
D {La suma es doce}			

Es muy importante que domines el cálculo de probabilidades, así como la distinción entre sucesos mutuamente excluyentes y sucesos complementarios y el cálculo de su probabilidad de ocurrencia, ya que en este bloque aprenderás a calcular la probabilidad de eventos independientes.

Probabilidad de ocurrencia de dos sucesos independientes

Adela trabaja para una editorial que edita una revista juvenil muy solicitada en México y otros países de Latinoamérica. Cada día en la entrada del edificio donde se encuentran sus oficinas, ella se para frente a los 5 ascensores y pulsa el botón para llamar uno y subir. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy, a la salida de su trabajo, Adela baje por un ascensor distinto a aquel por el que subió?

Para analizar este problema, confeccionemos un diagrama (figura 3.49). Observa.

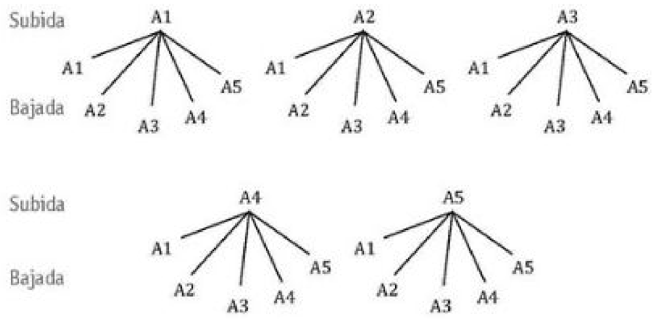


Figura 3.49

Por cada uno de los ascensores por los que puede subir tiene 5 posibilidades de que llegue uno para bajar. Por lo tanto, tendrá 25 posibilidades totales. Ahora, si de ellas no puede escoger para que el ascensor sea el mismo, debemos descontar las posibilidades de ascensores repetidos (A1-A1, A2-A2, A3-A3, A4-A4 y A5-A5), con lo que tendremos, entonces, 20 posibilidades totales bajo las condiciones dadas. De ellas, solo una será la que coincida con lo que le sucederá hoy a Adela. Por lo tanto, la posibilidad de que suba y baje por un ascensor distinto será $P = \frac{1}{20}$. ¿Estás de acuerdo?

Pensemos esto desde el siguiente punto de vista:
Los sucesos "subir por un ascensor" y "bajar por un ascensor distinto" son sucesos independientes, ya que el que hecho de que Adela suba por uno de los 5 ascensores no influirá en el ascensor que llegue a buscarla para bajar.

Ahora pensemos, ¿cuál es la probabilidad de Adela de subir por un ascensor? Claro, es $P(\text{subir}) = \frac{1}{5}$ (una de las cinco posibilidades que tiene). ¿Y cuál es la probabilidad de bajar por uno distinto del que subió?
Por supuesto, es $P(\text{bajar}) = \frac{1}{4}$ (uno de los cuatro que quedan, que sea distinto al de la mañana).

Como ya sabemos que la probabilidad de que suceda el primer evento y el segundo a la vez debe ser $\frac{1}{20}$, podemos deducir que $P(\text{subir y bajar por un ascensor distinto}) = P(\text{subir}) \cdot P(\text{bajar}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

Entonces, podemos generalizar que: Si A y B son dos sucesos independientes, entonces, la probabilidad de ocurrencia de A y B es el producto de las probabilidades de cada uno de ellos.
Esto es, $P(A \cap B) = P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Volvamos al problema de Rogelio y su concurso para ganar el auto. Supongamos que para ganar debe obtener cara en la moneda y 2 o un 3 en las bolitas y un 4 en el dado. ¿Qué probabilidad tendrá de ganar el auto?

Como ya habíamos dicho, los tres sucesos son independientes, por lo tanto, se tendrá que:
$P(\text{ganar}) = P(\text{cara}) \cdot P(2 \text{ o } 3) \cdot P(4)$.

$P(\text{ganar}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36} \approx 0.028$,

es decir, un 2.8%, aproximadamente.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Macarena está estudiando probabilidades para su examen. Su maestro le preguntó cuál es la probabilidad de contestar al azar un examen que consta de 70 preguntas con 5 posibles alternativas cada una y obtener todas las respuestas correctas.

SOLUCIÓN
Procedimiento: Macarena pensó un momento y respondió:
La probabilidad de contestar bien una pregunta es $\frac{1}{5}$ (hay una respuesta correcta de 5).

Como hay 70 preguntas y ellas son sucesos independientes, entonces se puede escribir que,

$$P(\text{pedida}) = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5}}_{70 \text{ veces}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{70} \approx 1.18 \times 10^{-49} \approx 1.18 \times 10^{-47}\%$$

y eso es prácticamente 0.

2. La mamá de Claudio debe ir a una cena organizada por la empresa en la que trabaja. Ella tiene para combinar 3 pantalones, 4 faldas, 6 blusas y 4 chaquetas. Cualquier tenida que elija combina. Como su mamá está indecisa sobre qué ponerse, Claudio le dice que él la ayudará a escoger y lo hace al azar, justo cuando su mamá ya había elegido. Claudio selecciona 1 pantalón o falda, una blusa y una chaqueta. ¿Cuál es la probabilidad de que Claudio haya escogido la tenida que su mamá había pensado?

SOLUCIÓN
Procedimiento: Como elegir la falda o pantalón, la blusa y la chaqueta son eventos independientes entre sí, podemos anotar que:
$P(\text{pedida}) = P(\text{pantalón o falda}) \cdot P(\text{blusa}) \cdot P(\text{chaqueta})$

$P(\text{pedida}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{168} \approx 0.006$, es decir, el 0.6%, aproximadamente.

3. El papá de Juan le propone un juego a su hijo. Si gana, hoy no le tocará cortar el pasto. Coloca dos cajas distintas, la primera con fichas numeradas del 1 al 5, y la segunda, con 3 dados: negro, naranja y amarillo. El desafío es sacar una ficha y un dado y que estos sean la ficha con el número 4 y el dado negro. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no corte el pasto hoy?

SOLUCIÓN
Procedimiento: Como los eventos son independientes, entonces ¿cómo calculamos su probabilidad? Calcula y justifica.

4. Karina está un poco aburrida. De pronto ve el mazo de cartas inglesas que hay en su estante, lo toma y comienza a extraer una a una las cartas, mirando lo obtenido y devolviéndola al mazo. ¿Cuál es la probabilidad de que a la cuarta extracción haya obtenido, en el siguiente orden, un 4, un 3 de diamante, un rey y un 8 o un 5?

SOLUCIÓN
Procedimiento: ¿Es posible considerar cada extracción independiente de la anterior? Explica. Describe el procedimiento utilizado y la solución de este ejercicio.

¿Es coherente la solución a este ejercicio, con la pregunta efectuada? Interpreta.

Y para finalizar...

Considera la actividad inicial en la que se lanzaban dos dados simultáneamente. Ahora, en parejas, planteen otro suceso que sea independiente de los anteriores, pero que a la vez sea coherente con el experimento del lanzamiento de ambos dados. Expliquen por escrito la elección de su evento y justifiquen ante el resto de la clase su elección.

Comprueba tus conocimientos Tema 4

I. Completa cada una de las siguientes proposiciones con la información que corresponda.

1 Para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos independientes es necesario multiplicar ambas probabilidades ______________________________.

2 Si A y B son sucesos independientes con $P(A) = 0.03$ y $P(A \cap B) = 0.006$, entonces la probabilidad de B es ______________.

3 Sean M y N sucesos independientes que tienen la misma probabilidad y $P(M \cap N) = 0.0256$, luego, $P(M) + P(N)$ es igual a ______________.

4 Si A y B son sucesos independientes tal que la probabilidad de A es el doble que la de B y es igual a 0.016, entonces la probabilidad de A y B es ______________.

5 Si M, N y S son sucesos independientes, entonces la probabilidad de que ellos ocurran a la vez es ______________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Al lanzar un dado y una moneda a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un número par y un sello?

2 De un grupo de cinco personas, al que pertenece Diego, se deben elegir dos para formar una comisión de evaluación. ¿Cuál es la probabilidad de que Diego no integre dicha comisión?

3 Entre mi ropa hay 5 camisas (blanca, roja, amarilla, violeta y verde) y hay 4 pantalones (azul, negro, blanco y rojo). ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una camisa y un pantalón, al azar, esta combinación sea mi camisa blanca y el pantalón azul?

4 Hoy mi novio me ha invitado a celebrar nuestro primer aniversario. Mi padre me dio permiso, pero debo llegar antes de las diez de la noche, lo que hace que solo podamos escoger una cosa que hacer juntos. Él me ha propuesto varias: 3 películas, 2 obras de teatro, 3 lugares para comer, entre ellos el restaurante en el que me pidió que fuera su novia. Como no sabíamos qué hacer, escribimos cada lugar en papeles y los echamos a una bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de escoger el bello restaurante aquel?

5 Una caja contiene 9 bolas blancas y 5 negras. Se han extraído dos maneras de manera sucesiva. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aparecido primero una bola blanca y luego una bola negra.

6 Melchor y Baltazar están participando en el torneo de tiro al blanco que se está realizando en las afueras de Jalisco. La probabilidad de que Melchor acierte es de un 80% y la de su adversario es de un 75%. Por sorteo, comienza a jugar Melchor y de manera alternada continua Baltazar en una serie de cuatro tiros en total. Simbolizando por M el suceso: "Melchor acierta" y por $\overline{M}$, el suceso contrario. Análogamente B: "Baltazar acierta", y por $\overline{B}$, el suceso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte:

a. $MBMB$? (es decir, que ambos acierten dos veces en las serie de cuatro tiros)

b. $M\overline{B}MB$?

c. $MB\overline{M}B$?

d. ¿En cuál de las preguntas anteriores se calculó la probabilidad de un empate? ¿Por qué?

e. Con los datos de este problema genera otra pregunta con su respuesta correspondiente.

f. Indica otro tipo de competencia en que las probabilidades se manejen de manera similar a la de este ejercicio.

7 Se lanzan dos dados, y se extrae una carta de un mazo del naipe inglés. Determina la probabilidad de que suceda que:

a. los números coincidan y aparezca un diamante.

b. el producto de los números sea doce y se presente un trébol.

c. los números sumen siete y aparezca trébol o corazón.

d. aparezcan dos números pares y ocurra que se presente un K.

e. no aparezcan ningún número mayor que tres y no ocurra que se presenten J, ni Q.

8 En la bolsa A tenemos 7 bolas negras y 13 blancas y en la bolsa B, 12 negras y 8 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga una bola:

a. blanca de cada una de estas bolsas?

b. negra de la primera bolsa y otra blanca pero de la segunda?

c. negra de cada una de estas bolsas?

d. ¿Qué es más probable: que se saque una bola blanca de la bolsa A y otra negra de la bolsa B, o una negra de la primera bolsa y una blanca de la otra?

9 Sean A, B y C sucesos independientes, tales que $p(A) = 0{,}45$, $p(B) = 0{,}40$ y $p(C) = 0{,}55$. Encuentra la probabilidad de que:

a. ocurran los tres sucesos.

b. acontezcan A y C pero no B.

c. sucedan B y C pero no ocurra A.

d. ocurra solo el de menor probabilidad.

e. Inventa una pregunta usando los datos de este ejercicio. No olvides en dar la respuesta.

10 Un test de 12 preguntas de selección múltiple está estructurado de la siguiente manera: las preguntas 1 a 4 tienen cinco alternativas cada una, las preguntas 5 a 8 tienen tres alternativas cada una, las preguntas 9 y 12 tienen cuatro alternativas cada una. Se decide responder este test completamente, eligiendo azarosamente las respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. no haya ninguna incorrecta?

b. estén todas correctas excepto la 5 y la 9?

c. ninguna de las cuatro primera estén incorrectas, pero el resto sí.

d. las preguntas impares sean solo las correctas?

11 El cuadro contiene la clasificación de los trabajadores de una empresa de enlozados respecto a dos características:

i. El intervalo de años de pertenencia al sindicato,

ii. Su respuesta a la pregunta: "¿Desea Ud. trabajar en la nueva sede de nuestra empresa ubicada en Fresnillo?"

Respuesta a la pregunta	Número de años de sindicato			
	Menos de 1	1 - 3	4 - 10	Más de 10
Sí	30	54	116	28
No	14	18	34	6
No sé	3	2	1	0

Nayeli y Narciso son los encargados de procesar toda la información proveniente de esta consulta. Ellos disponen de los nombres de los consultados y han decidido entrevistar a algunos a fin de profundizar y conocer más otras inquietudes no contempladas en la pregunta. Para esto, los encargados van eligiendo de manera independiente dos trabajadores para entrevistar. Nayeli decide hacer su elección solo con aquellos que llevan menos de un año y Narciso exclusivamente con los que han estado entre 1 a 3 años en la empresa. En este orden, cada uno elige un trabajador. Determina la probabilidad de que en la elección aparezca:

a. un par de trabajadores que haya respondido "Sí".

b. un trabajador que haya manifestado "No sé" y otro, "No".

c. una persona que no desee trabajar en la nueva sede y con otra que sí lo desee.
d. un par de trabajadores indecisos.

12 La señora Leticia les ha dicho a sus hijos que la probabilidad de vender parte de la hacienda familiar es de un 38%. Además, les agregó que la probabilidad de que se la compre don Edmundo es del 24% y que la compre don Faustino es del 18%. Sus hijos han hecho algunos cálculos para saber las siguientes probabilidades. Tú puedes dar también la respuesta.

a. Que se venda esa parte de la hacienda y que la compre don Edmundo.
b. Que se venda y la compre don Faustino.
c. Que se venda y no la compre ninguno de ellos.

13 Un suceso A tiene 23% de probabilidad de ocurrir; otro suceso B tiene $\frac{2}{5}$ de probabilidad de ocurrir, y por último, la probabilidad de ocurrencia de un suceso C es 0.02. Si los sucesos son independientes, calcula:

a. la probabilidad de que ocurra A y B, pero no C.
b. la probabilidad de que ocurra B y C, pero no A.
c. la probabilidad de que ocurran los tres sucesos a la vez.
d. la probabilidad de que ninguno de ellos ocurra.

14 En el concurso de televisión en que está participando la mamá de Aurora, hay 3 cajas: una roja, una azul y una verde, frente a cada uno de los autos de igual color. En la caja roja hay 7 llaves; en la azul 8 llaves; y en la verde 6 llaves. Solo una llave de cada caja enciende el auto respectivo, y la mamá de Aurora se llevará todos los autos que enciendan, con la llave que elija de cada una de las cajas. Calcula:

a. la probabilidad de que gane uno de los tres autos.
b. la probabilidad de que gane dos de los tres autos.
c. la probabilidad de que gane los tres autos.

15 Pedro ha sido elegido como el presidente de una comisión. Falta completar los cargos de vicepresidente y secretario. Los posibles candidatos son: Antonio, Alejandra, Gabriela y Daniel. ¿Qué tan probable es que Gabriela quede como vicepresidenta?

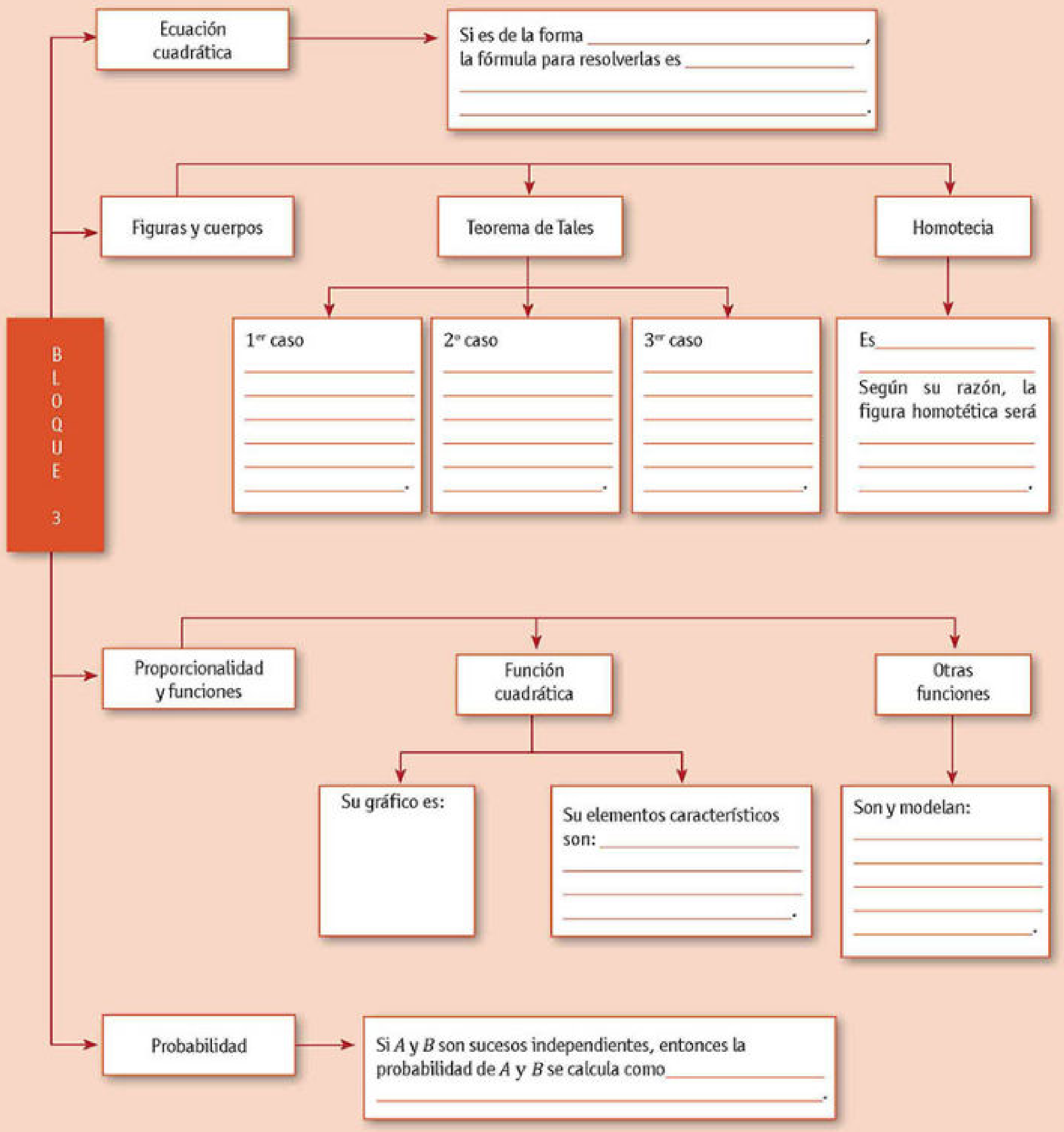
16 Jorge y su equipo están preocupados por la buena realización del Congreso de Tecnología del Medio Ambiente 2014, al que están asistiendo 100 personas, de las cuales 40 solo hablan inglés, 25 solo francés, y el resto, ambos idiomas. Además, 45 provienen de Europa, 35 de América y el resto de Asia. Casualmente, al bajar a la cafetería, uno de los asistentes se acerca a él para hacerle una consulta. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una persona que venga de:

a. Asia y hable en inglés?
b. Europa y hable francés?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	✓	+/–	–
Soy capaz de explicar cómo se calcula la probabilidad de dos eventos independientes.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un cuadro resumen que incluya la definición de eventos independientes, con tres ejemplos, y la forma de calcular su probabilidad de ocurrencia.

Síntesis Bloque 3



Comprueba tus conocimientos Bloque 3

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones con el concepto o solución pedidos:

1 Si al resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se tiene que $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 20}}{2}$, entonces los valores de las constantes a, b y c son, respectivamente:

________________________________.

2 Dos de las proporciones que se pueden establecer a partir de la figura 3.50 adjunta son:

____

________________________________.

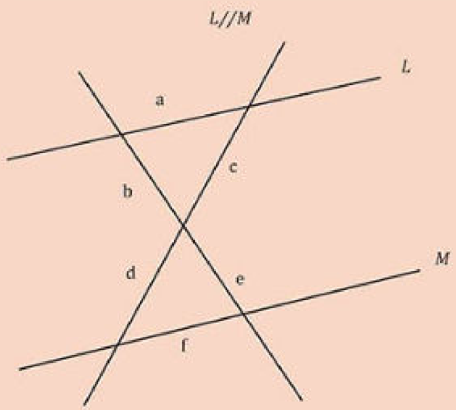


Figura 3.50

3 Si una figura que es homotética de otra es más pequeña que la original y no está invertida, es porque la razón de homotecia es un número

________________________________.

4 Una parábola es una gráfica que representa a una función de la forma

________________________________.

5 Si A y B son sucesos independientes y $P(A \text{ y } B) = 0.24$ y la probabilidad de B es del 40%, la probabilidad de A es

________________________________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios colocando TODO el desarrollo:

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $5x(2x + 3) = 2 + 7x$

b. $(3x - 1)^2 = 4(x + 1) - 3x$

c. $\dfrac{x(x + 5)}{7} - \dfrac{x}{3} = 2$

2 Dada la figura 3.51, construye una figura homotética a la dada con centro de homotecia H y razón $-\frac{1}{2}$.

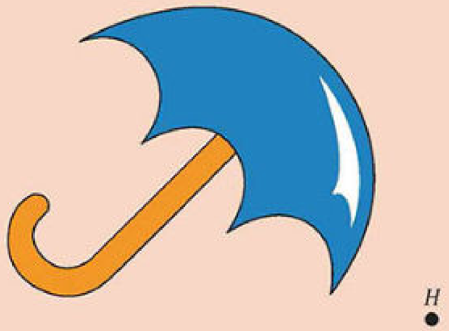


Figura 3.51

3 Para cada uno de los recipientes de la figura 3.52, bosqueja su gráfico de llenado, sabiendo que el grifo que los llena lo hace siempre a una velocidad de salida del agua constante:

Figura 3.52

4 La probabilidad de que un foco del tipo A presente fallas en su construcción es de 0.12; de que un foco del tipo B presente fallas es de 0.09, y de que una del tipo C presente fallas es del 7%. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un foco de cada tipo de su línea de producción:

a. ninguna de ellas presente fallas?

b. solo el foco del tipo B presente fallas?

5 En el cuaderno de matemáticas de Juan hay dibujado un triángulo rectángulo donde los catetos están marcados con "$x + 2$" y "$2x - 2$". Más abajo dice: "La hipotenusa es 15. ¿Cuánto miden los catetos?". Al parecer, Juan dejó su cuaderno en la mesa porque no pudo hacer este ejercicio, ¿puedes tú dar la respuesta?

6 De pronto Silvana se dio cuenta de que la tabla de planchar de su casa (figura 3.53) se parecía a las figuras vistas hoy en clase de Matemáticas. Tomó una huincha y midió los trozos de metal que determinaban los soportes de la mesa. Estas fueron las medidas que obtuvo:

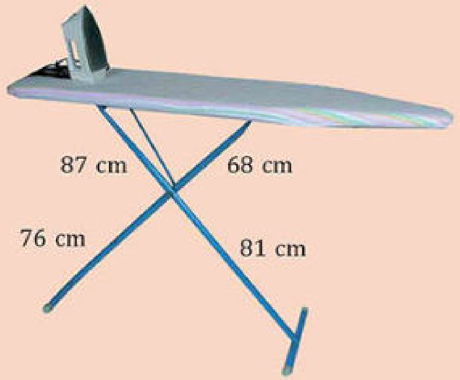


Figura 3.53

Cuando volvió a mirarla, pensó que algo estaba mal en sus medidas, pues la tabla estaba paralela al piso. Luego volvió a medir los segmentos y efectivamente se había equivocado en el que midió la primera vez como 68 cm. Ahora dime tú, ¿por qué Silvana notó que su medición era incorrecta? Justifica matemáticamente. ¿Cuál es la medida correcta del trazo mencionado?

7 Macarena debe viajar de una ciudad a otra. Las primeras cuatro horas lo hace a una velocidad constante de 80 km/h. Luego se detiene durante una hora y media para comprar. Prosigue su viaje y avanza 325 km en 4 horas para volver a detenerse durante media hora y, por último, recorre los 400 km restantes en 4.5 horas. Haz una gráfica tiempo versus distancia recorrida que represente la situación planteada. ¿Cuántos km recorrió finalmente Macarena y cuánto tiempo demoró?

1 La gráfica de la figura 3.54 muestra la relación entre la altura alcanzada por una pelota al ser lanzada versus el tiempo que pasa desde su lanzamiento. De acuerdo con esta información, marca Verdadero o Falso según corresponda en cada una de las afirmaciones dadas:

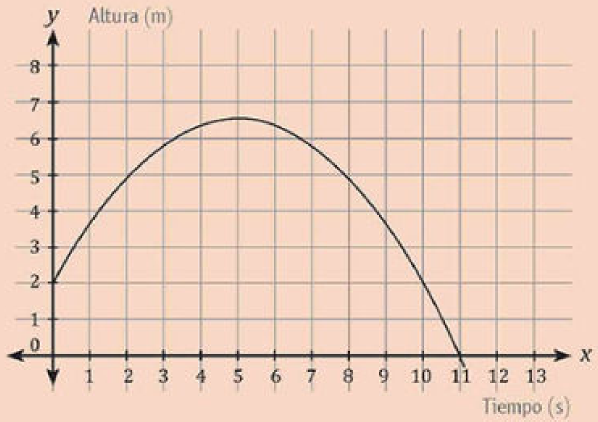


Figura 3.54

La pelota fue lanzada desde dos metros de altura	Verdadero / Falso
La pelota se demoró 11 segundos en alcanzar su altura máxima	Verdadero / Falso
La pelota vuelve a estar a dos metros del suelo a los 10 segundos de su recorrido	Verdadero / Falso
La altura máxima que logra es de 5.5 metros	Verdadero / Falso

2 Dada la figura 3.55, responde:

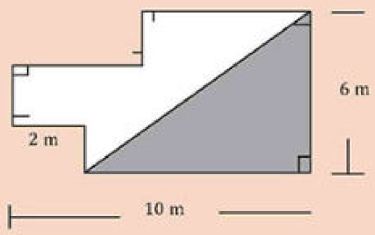


Figura 3.55

¿Es posible calcular el perímetro de la figura total y el de la figura sombreada? Justifica explicando la estrategia de cálculo utilizada en caso de que sea posible o argumenta matemáticamente en caso de que no lo sea.

Evaluándonos

Autoevaluación

Realiza esta autoevaluación sobre tu desempeño en este bloque, de manera responsable y honesta, pues esta información te ayudará a remediar y mejorar tu desempeño.

Contenido	Sí lo logré	Me falta mejorar
Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.		
Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.		
Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.		
Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.		
Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.		
Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.		
Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.		
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).		

Heteroevaluación

Pídele a un compañero que valore si:

Actitud	Sí lo hice	Me sugieren mejorar
Colaboré participativamente en las actividades grupales.		
Mi participación en las actividades grupales fue meritoria.		
Expuse mis ideas de manera clara y precisa ante el resto de la clase.		
Respeté siempre la opinión de mis pares.		
Acepté todas las sugerencias que me ayudaron a mejorar mi desempeño grupal, de parte de mis compañeros.		

Heteroevaluación

Pídele a tu maestro que valore tu desempeño sugiriendo estrategias para mejorar en el caso que resulte pertinente.

Al finalizar el bloque, el alumno:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado de rango y la desviación media.

Estudiarás en este bloque:

Tema 1: Patrones y ecuaciones

- Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Tema 2: Figuras y cuerpos

- Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Tema 3: Medida

- Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
- Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Tema 4: Proporcionalidad y funciones

- Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Tema 5: Análisis y representación de datos

- Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Bloque 4

Patrones y ecuaciones

Estudiarás en este tema

- Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Lee la siguiente historia:
En una plantación de mamey se han dispuesto 50 filas de árboles, tal como se muestra en la figura 4.1, vista desde arriba:

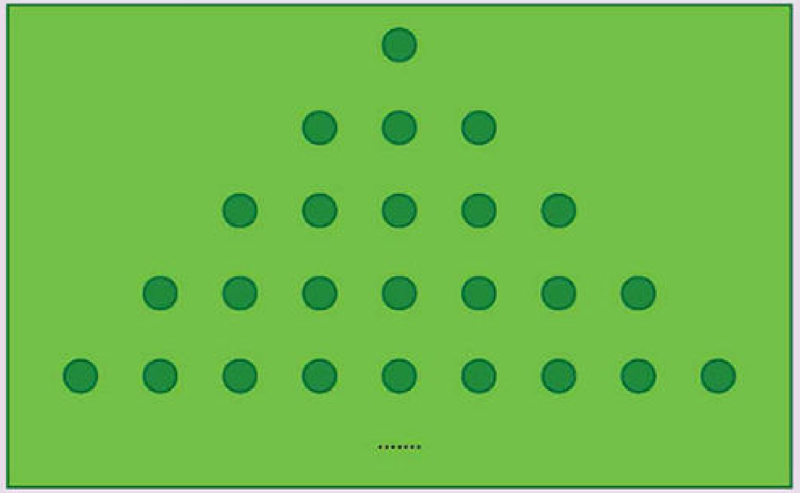


Figura 4.1

Y para comenzar...

1. ¿Te acuerdas cómo se llaman estas colecciones de números?, ¿cuáles eran las partes que las componían?

2. ¿Es posible mediante una expresión algebraica encontrar el término enésimo de esta colección o sucesión de números?

Para ejercitar, resuelve en grupos de tres integrantes los siguientes ejercicios referidos al problema inicial de la plantación de mamey, justificando y argumentando a favor o en contra de tus procedimientos y los de tus compañeros:

1. Determinen la cantidad de árboles que habrá en la fila número 8 y en la fila número 10.

2. Calculen cuántos árboles habrá en total, considerando las primeras 8 filas.

3. Escribe el término general de la sucesión anterior.

Para comprender los nuevos contenidos que te presentaremos a continuación es necesario que domines los contenidos relacionados con sucesiones que ya has aprendido en grados anteriores.

Sucesión: conjunto de números ordenados con una cierta lógica.

Sucesiones con expresiones cuadráticas como término enésimo

Ayúdame tú a resolver el siguiente problema. Fernanda pensaba en todos los cuadrados de distinto lado, por ejemplo, de lado 1 cm, de lado 2 cm, de lado 3 cm, etcétera y escribió el valor de cada una de sus áreas. ¿Cuáles son estas? Muy bien, ellas son: 1, 4, 9, 16, ... (en cm^2) como se muestra en la figura 4.2. ¿Podrías tú decir que las áreas de los cuadrados forman una sucesión? ¿Puedes escribir su término general?, ¿tendrá relación con la fórmula del área de un cuadrado?

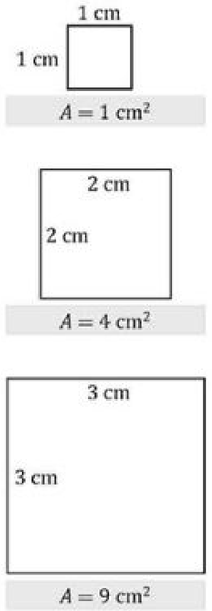


Figura 4.2

Así es, como la fórmula para calcular el área de un cuadrado de lado n es n^2, entonces para la sucesión 1, 4, 9, 16... su término general será: $a_n = n^2$, si $n = 1, 2, 3, 4...$

Si te fijas bien, este es el término general, y es una expresión cuadrática (ya que la variable n está elevada a dos). Ahora bien, si la sucesión es un múltiplo o submúltiplo de n, el término general se escribirá de la forma an^2.

Estudiemos este desde dos puntos de vista. El primero, determinar la sucesión a partir de su término general. Por ejemplo:

1. Dada la siguiente expresión general de una sucesión: $a_n = 2n^2$, escribe los 3 primeros términos y el trigésimo término:

   Los 3 primeros términos se obtendrán remplazando n por 1, 2 y 3, respectivamente:

   $a_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$
   $a_2 = 2 \cdot 2^2 = 8$
   $a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$

   ¿Y para el trigésimo? Buscamos el término de lugar 30. Entonces, en la expresión general dada, remplazamos n por 30.

   Así, la sucesión será: 2, 8, 18, ..., ____, ...

2. Si la expresión general de una sucesión es $a_n = 6n^2$ y sabemos que uno de sus términos es igual a 54, ¿en qué lugar se encuentra?

   Lo que se nos pide es el valor de n que remplazamos en la fórmula general para que el resultado sea 54. Es decir, $6n^2 = 54$, entonces:

   $6n^2 = 54 \quad /:6$
   $n^2 = 9 \quad \sqrt{}$
   $n = 3$ o $n = -3$

   Observa que n representa el lugar de un término, ¿tendrá sentido que este valor sea negativo o decimal? Explica.

   Luego, ¿cuál será la solución de este ejercicio? Qué término ocupa el número 54.

El segundo punto de vista del estudio de una sucesión es encontrar el término general a partir de algunos términos de la sucesión. Por ejemplo:

1. Encuentra la expresión o término general de la sucesión 2, 8, 18, 32, 50...

   ¿Cómo hacer esto? Ciertamente, si te fijas y comparas esta sucesión con la primera que vimos, notarás que cada uno de sus términos es 1 unidad menor que aquella. Observa:

   1[era] sucesión dada: 1, 4, 9, 16...
   Sucesión del ejercicio: 2, 8, 18, 32, 50...

   Si lo pensamos de esta manera, como la primera sucesión tiene término general $a_n = n^2$ y cada uno de los términos de la sucesión pedida es el doble de los términos de la primera, entonces es lógico que la expresión general de la sucesión del ejercicio sea $a_n = 2n^2$.

   Esta es una manera de abordar el problema si la sucesión dada se puede relacionar con otras ya estudiadas, pero si no es así, ¿existe algún método para obtener siempre el término general?

   Por supuesto que sí. Analicemos un poco más la sucesión y la diferencia que hay entre sus términos. ¿Recuerdas que las sucesiones que has visto (progresiones aritméticas) se comportaban de tal manera que las diferencias entre dos términos consecutivos era siempre la misma? Hagamos algo análogo en este caso.

Sucesión	2	8	18	32	50 ...
Diferencia entre los términos	6	10	14	18 ...	
Diferencia entre las diferencias anteriores	4	4	4		

Si analizamos estas diferencias, las primeras no son constantes; sin embargo, si restamos nuevamente estas diferencias, los resultados esta vez sí son constantes. ¿Pasará esto en cualquier sucesión cuadrática? Chequeemos esto con una de las sucesiones cuadráticas anteriores:

Para la sucesión de término general $a_n = 6n^2$, escribamos los seis primeros términos (recuerda que debes remplazar n por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Además, habíamos determinado que el 3[er] término era 54).

Progresión aritmética: serie de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante. Esta cantidad es conocida como **diferencia de la progresión**.

La sucesión será: 6, 24, 54, 96, 150, 216... Verifiquemos las diferencias:

Sucesión	6	24	54	96	150	216
Diferencia entre los términos	18	30	42	54	66	
Diferencia entre las diferencias anteriores	12	12	12	12		

Efectivamente, se cumple.

Veamos. Partiendo de la hipótesis de que el término general es una expresión cuadrática, demostraremos que las segundas diferencias son constantes. Entonces, sea el término general de la sucesión $a_n = an^2$, escribamos los 5 primeros términos de ella:

$a_1 = a \cdot 1^2 = a$

$a_2 = a \cdot 2^2 = 4a$

$a_3 = a \cdot 3^2 = 9a$

$a_4 = a \cdot 4^2 = 16a$

$a_5 = a \cdot 5^2 = 25a$

Al hacer las primeras diferencias, se obtendrá:

$d_1 = a_2 - a_1 = 4a - a = 3a$

$d_2 = a_3 - a_2 = 9a - 4a = 5a$

$d_3 = a_4 - a_3 = 16a - 9a = 7a$

$d_4 = a_5 - a_4 = 25a - 16a = 9a$

Realicemos las segundas diferencias:

$d_2 - d_1 = 5a - 3a = 2a$

$d_3 - d_2 = 7a - 5a = 2a$

$d_4 - d_3 = 9a - 7a = 2a$

Como a es una constante, entonces $2a$ también lo es. Este método nos da también una forma de obtener el término o expresión general de una sucesión cuadrática.

PROBLEMA RESUELTO

1. Encontrar el término general de la sucesión $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, ...$

SOLUCIÓN

Procedimiento: Veamos si esta sucesión es cuadrática.
Hagamos las primeras y segundas diferencias:

Sucesión	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$
Diferencia entre los términos	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	
Diferencia entre las diferencias anteriores	1	1	1		

Si te fijas, por el procedimiento anterior, la constante que resulta debe ser igual a $2a$ (recuerda que este valor fue encontrado de manera general). Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Entonces, remplazando el valor de a en la fórmula del término general ($a_n = an^2$), podemos escribir que $a_n = \frac{1}{2}n^2$. Hemos conseguido el término general.

Más que...

También puedes determinar sucesiones con términos generales de otros grados. Por ejemplo, si las terceras diferencias son constantes, entonces el término general de la sucesión será una expresión de tercer grado o cúbica de la forma an^3. Si las cuartas diferencias son constantes, el término general de la sucesión será una expresión de cuarto grado de la forma an^4. Y así sucesivamente.

Y para finalizar...

En grupos de tres integrantes, contesten las preguntas que se plantean, según lo que se muestra en la figura 4.3.

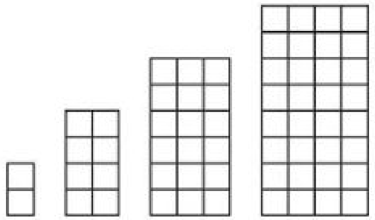


Figura 4.3

a. ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura número 50?

b. Discutan y justifiquen la ecuación que define al término general de la sucesión de la figura 4.3.

c. Verifiquen que esta ecuación se cumple, calculando los términos a_1, a_4 y a_{50} y comparando con los actuales resultados.

Comprueba tus conocimientos Tema 1

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda:

1. En una sucesión cualquiera, a_n representa el ________________ término.
2. En particular, si $a_n = \frac{3}{4}n$, los primeros 3 términos son ______, ______ y ______.
3. Si de la sucesión se conocen los cinco primeros términos y se sabe que ella es una sucesión cuyo término general es cuadrático, entonces para obtener su término general se procede de la siguiente manera: ____.
4. La sucesión $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1...$ tiene por término general ____________________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Para cada una de las siguientes sucesiones:
   - i. 5, 20, 45, 80, 125...
   - ii. $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}, 2, \frac{25}{8}...$
   - iii. 1.5, 6, 13.5, 24, 37.5...

   a. encuentra su expresión o término cuadrático general.

   b. indica los tres términos que vienen a continuación del último mencionado.
2. Dada la siguiente sucesión cuadrática: 14, 56, 126...

   a. escribe el término general.

   b. usando la fórmula que has mencionado anteriormente, averigua si 350 forma parte de esta sucesión. Justifica tu respuesta.

   Ahora bien, dividiendo por 2 cada uno de los términos de la sucesión original presentada en el enunciado:

   c. halla el término general de esta nueva sucesión.

   d. compara las fórmulas que has obtenido en a. y c. ¿Qué puedes decir de los coeficientes respectivos?
3. Considera la sucesión de números formada por todas las áreas de las circunferencias de radio n, con $n = 1, 2, 3, 4...$

   a. Indica la expresión algebraica del término general, considerando a $\pi \approx 3$.

   b. ¿Cuál es el valor de la suma de las áreas de las circunferencias de radio 5 y 6 unidades, respectivamente?, ¿y las de radios 6 y 7?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar qué es una sucesión.			
Soy capaz de escribir una sucesión dado su término general.			
Soy capaz de explicar cuál es la condición para que una sucesión tenga un término general que sea una expresión cuadrática.			
Entendí los ejercicios resueltos en este tema.			
Desarrollé correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			

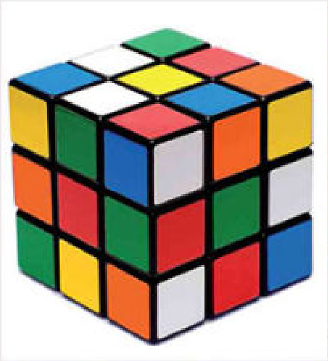
Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un cuadro resumen que incluya el procedimiento de obtener una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Figuras y cuerpos

Estudiarás en este tema

- Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Lee y observa:
Existen muchos objetos construidos por el hombre que se asemejan a cuerpos geométricos. Observa las siguientes fotografías:



Y para comenzar...

1. ¿Qué nombre reciben los cuerpos geométricos a los que se asemejan los objetos anteriores?

2. ¿Explica por qué los objetos anteriores no pueden considerarse iguales a los cuerpos geométricos que los describen?

En parejas, enuncien las características de los cuerpos nombrados anteriormente y luego en una puesta en común y con la ayuda de su maestro, discutan con el resto de la clase.

Para comprender los nuevos contenidos que te presentamos a continuación, es necesario que conozcas y comprendas muy bien las características y las diferencias y similitudes entre prismas y pirámides.

Conos, cilindros y esferas

Omar estaba un tanto aburrido e inventó un juego con su cuaderno. Pasó un cordel por el espiral y tomándolo de ambos extremos comenzó a girarlo cada vez más a prisa. Su hermana, Lucilla, al verlo le dijo: "Omar, mira la figura que se logra ver, ¿qué es?".

¿Puedes decirme tú qué figura se forma?, ¿sabes cuál es su nombre?

Existen tres cuerpos geométricos, conocidos como cuerpos redondos, que se pueden formar a partir de la rotación de figuras planas en torno a uno de sus lados, que se llamará eje de rotación. Ellos son el cilindro, el cono y la esfera.

Analicemos cada uno de ellos:

a. El cilindro
Construyamos un rectángulo y fijemos uno de sus lados con un eje (eje de rotación), tal como lo hizo Omar con su cuaderno. Hagamos girar el rectángulo en torno al eje determinado y obtendremos un cilindro. Observa la figura 4.4.

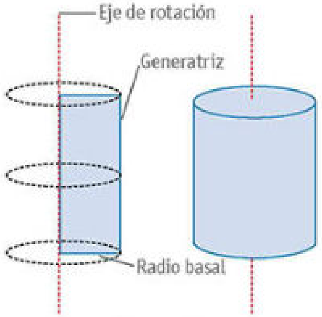


Figura 4.4

Como ves, el cilindro es un cuerpo que tiene dos círculos congruentes como bases (que se generan con la rotación del lado distinto al elegido como eje de rotación) y una cara curva, llamada manto curvo, que es el formado por el lado paralelo al eje de rotación. A este lado se le llama generatriz, pues es el trazo que genera el cuerpo geométrico. Nota que el cilindro no tiene vértices.

Supongamos que elegimos el lado más pequeño como eje de rotación, entonces se observa la figura 4.5.

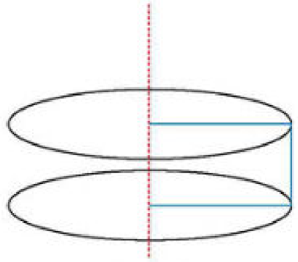


Figura 4.5

Nuevamente el cuerpo geométrico que se origina es un cilindro, que tendrá menos altura que el que se genera con el lado más largo como eje de rotación.

b. El cono

Construyamos un triángulo rectángulo y coloquemos el eje de rotación en uno de sus catetos. Hagámoslo girar en torno a ese eje y obtendremos un cono. Observa la figura 4.6.

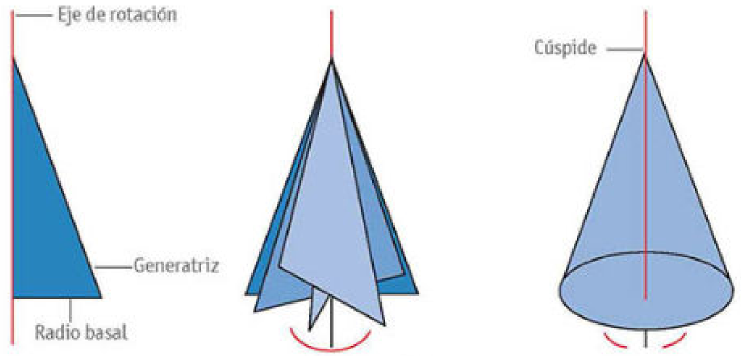


Figura 4.6

Como puedes observar, el cono es un cuerpo geométrico que tiene una base, que es un círculo, y un manto curvo (o cara curva) que termina en un punto llamado cúspide (esta no es un vértice, ya que por definición un vértice es aquel punto donde se unen tres o más aristas y esto supone caras planas que el cono no tiene). La hipotenusa del triángulo, que es la que genera el manto curvo, formará la generatriz. Nota que el cono no tiene vértices.

Si el eje de rotación se encuentra sobre el cateto más pequeño del triángulo rectángulo, se formará un cono de menor altura que el que se obtiene cuando el eje de rotación está sobre el cateto de mayor longitud.

¿Qué cuerpo se generará al colocar el eje de rotación sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo?

Efectivamente, se originan dos conos unidos por sus bases congruentes. Observa la figura 4.7.

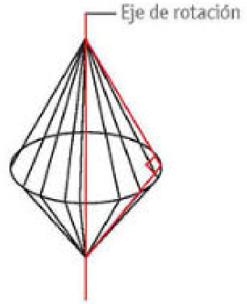


Figura 4.7

c. La esfera

Construyamos un semicírculo, coloquemos el eje de rotación sobre el diámetro del semicírculo y hagámoslo girar en torno a él. Obtendremos una esfera. Observa la figura 4.8.

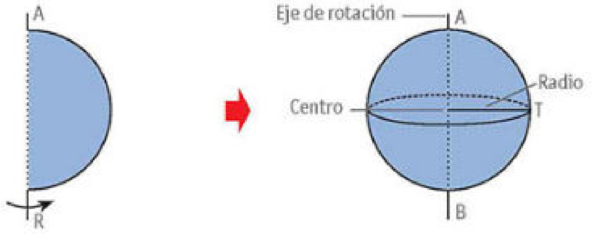


Figura 4.8

Así como ves, una esfera está formada solo por un manto curvo. Una esfera no tiene caras basales, ni cúspides, ni generatriz. Sus elementos principales son centro y radio. Como se gira en torno a un diámetro y todos los que se tracen son congruentes, entonces siempre se generará la misma esfera, no importa cuál diámetro sea el escogido como eje de rotación. Nota que la esfera no tiene vértices.

Si tuviéramos que resumir, podríamos decir que al hacer girar o rotar un triángulo rectángulo, un rectángulo y un semicírculo en torno a uno de sus lados o de su diámetro, en el caso del semicírculo se generan cuerpos geométricos redondos o con mantos curvos. Definiremos un cuerpo redondo como aquel que tiene círculos y mantos curvos como elementos que lo forman.

Puedes buscar más información sobre este tema en el siguiente link. Recuperado, febrero 27, 2013, de:
http://data.imatematicas.es/suprevol/revolucion.htm

¿Te acuerdas que los prismas y las pirámides tenían desarrollos planos que nos ayudaban a armarlos? Pues bien, los conos y cilindros también los tienen. Las llamadas redes de construcción o desarrollos planos de conos y cilindros nos ayudan a armarlos, pero, sobre todo, nos dan una idea de las figuras en las que los podemos descomponer para más adelante encontrar las fórmulas para sus áreas y volúmenes.

Observa la figura 4.9 para un cilindro:

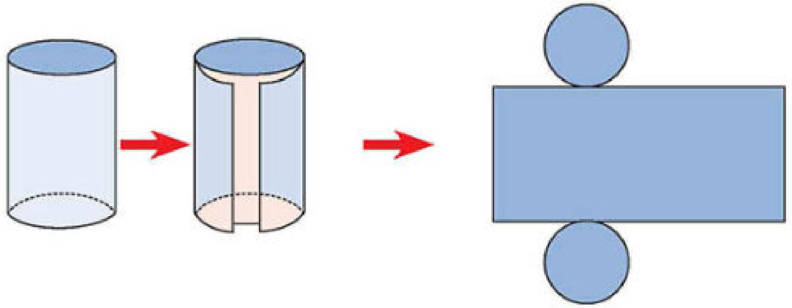


Figura 4.9

Si te fijas bien, el cilindro está formado por un rectángulo, que al doblarlo forma el manto curvo lateral, y dos círculos congruentes que constituirán las bases. Nota que el largo del rectángulo debe medir lo mismo que el perímetro de los círculos y que el ancho del rectángulo es el que determinará la altura del cilindro.

Observa en la figura 4.10 lo que ocurre para un cono.

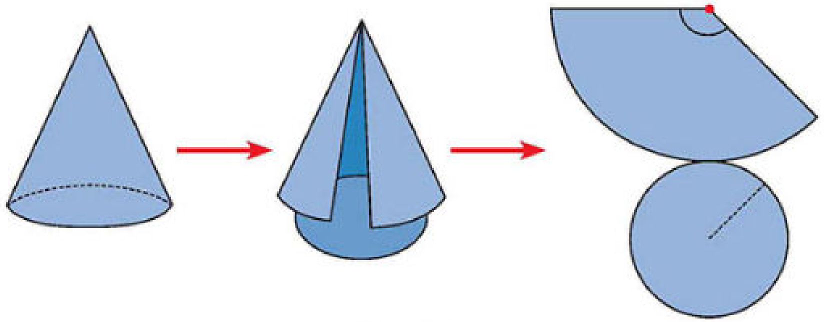


Figura 4.10

Nota que su desarrollo plano o red de construcción está formado por un círculo que será su base y un arco de circunferencia cuya longitud debe ser igual a la longitud del círculo basal. En este caso, el sector circular formará el manto curvo y su radio es la generatriz. Así también, la altura del cono está dada por el segmento que une la cúspide de la pirámide con el plano de la base en forma perpendicular. Entonces, si el cono es recto, como los que hemos visto, la altura llegará al centro del círculo basal.

¿Qué sucede con la esfera? ¿Tendrá un desarrollo plano o una red de construcción? Pues no, la esfera no tiene desarrollo plano. Esto quiere decir que no es posible construirla cortando una figura plana y doblándola.

Para averiguar más sobre los cuerpos redondos te dejamos estos links. Recuperados, marzo 1, 2013, de:

http://platea.pntic.mec.es/curso20/62_hotpotatoes/2010/aviera/6c_jquiz_aaron.htm

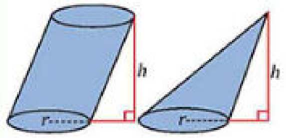
http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/cuerposgeom/cuerpos_redondos.html

En la vida cotidiana usamos muchos utensilios que tienen formas de cilindros, conos y esferas. Discute con otro compañero que otros objetos cotidianos pueden considerar.

Más que...

Los conos y cilindros que hemos estudiado son rectos, pues, en el caso del cilindro, la altura es de igual longitud que su generatriz; en el caso del cono, su eje de simetría coincidiría con la altura si trazáramos esta.

Pero hay conos y cilindros oblicuos. Observa.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Escribe el nombre de los cuerpos de la figura 4.11 bajo cada uno de ellos. En caso de no ser cuerpos redondos, indica qué tipo de cuerpos son.

Figura 4.11

SOLUCIÓN

Procedimiento: Solo basta con observar cada cuerpo para distinguirlo y anotar su nombre (figura 4.12).

Figura 4.12

2. Completa el (los) cuerpo(s) que se genera(n) a partir de la rotación de las siguientes imágenes de la figura 4.13. Indica qué cuerpo geométrico se genera.

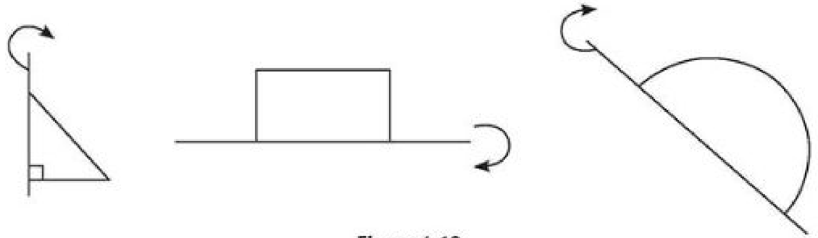


Figura 4.13

SOLUCIÓN

Procedimiento: Para observar directamente qué cuerpo es el que se genera, podemos dibujar en la libreta y luego recortar la figura geométrica indicada en cada caso en la figura 4.14, para proceder a girarla sobre uno de sus lados o diámetro según corresponda.

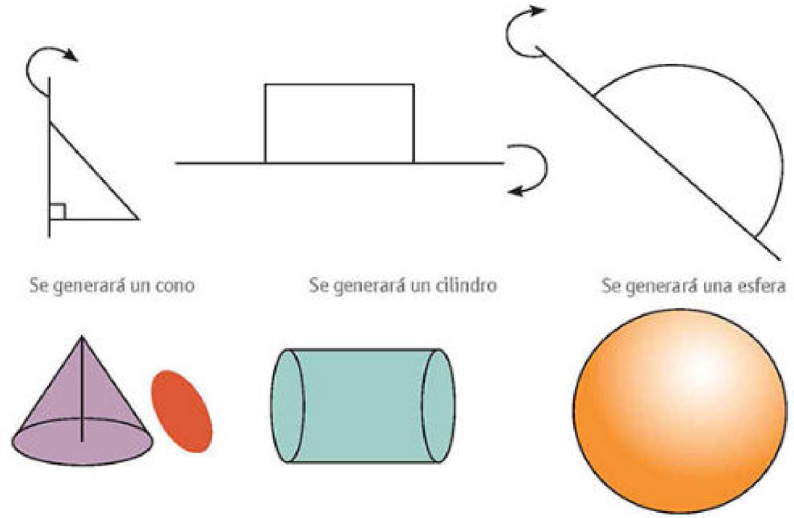


Figura 4.14

Y para finalizar...

En grupos de no más de tres integrantes, dibujen los desarrollos planos de las formas de la figura 4.15, justificando estos desarrollos y verificándolos con su maestro:

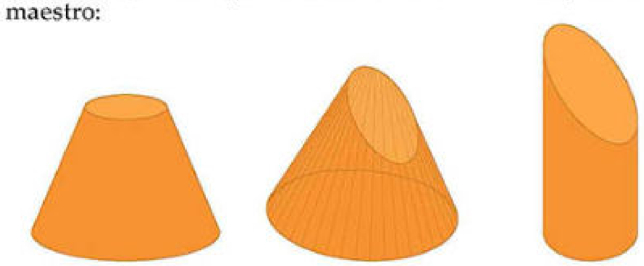


Figura 4.15

Comprueba tus conocimientos Tema 2

I. Coloca verdadero (V) o falso (F) frente a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica aquellas que son falsas.

1 ___ Un cono se genera haciendo girar uno de los catetos de un triángulo rectángulo en 360°.

2 ___ Si el eje de rotación de un semicírculo es su diámetro y luego se hace girar una vuelta completa en torno a él, se obtiene una esfera.

3 ___ Los elementos que forman un cuerpo redondo son círculos y mantos curvos.

4 ___ Si se hace rotar un rectángulo en torno de uno de sus lados, el otro lado perpendicular a este es su generatriz.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Valiéndote de los cuerpos redondos que hemos estudiado y usando cada uno de ellos, dibuja o bien busca una fotografía de cinco objetos de uso cotidiano donde ellos estén presentes.

2 Las figuras 4.16 pueden considerarse como compuestas por rectángulos, triángulos, semicírculos y rectángulos. Por ejemplo, la figura 4.16 a está formada por dos rectángulos de diferentes áreas que están unidos por uno de sus lados mayores.

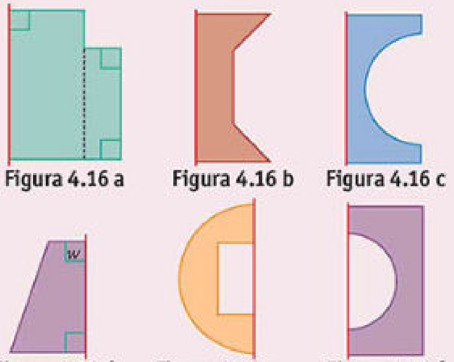


Figura 4.16 a Figura 4.16 b Figura 4.16 c

Figura 4.16 d Figura 4.16 e Figura 4.16 f

Con las observaciones anteriores, da respuesta a cada una de las siguientes preguntas:

a. Dibuja el cuerpo que se forma al hacerlas girar en 360°, tomando como eje de giro el segmento rojo de cada una de dichas figuras compuestas.

Ahora bien, ¿en cuál de ellas se genera:

b. un cono sin su cúspide? ¿Por qué?

c. una esfera que contiene un cilindro? Justifica tu respuesta

d. un carrete que permite enrollar el hilo para elevar una cometa? Explica tu afirmación.

Y continuando con los sólidos formados por los giros de las figuras 4.12 c y 4.12 f:

e. indica dos semejanzas y dos diferencias entre ellos usando los conocimientos que has aprendido en la presente lección.

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/−	−
Soy capaz de definir un cuerpo redondo.			
Soy capaz de explicar cómo se genera un cilindro a partir de la rotación de una figura plana.			
Soy capaz de explicar cómo se genera un cono a partir de la rotación de una figura plana.			
Soy capaz de explicar cómo se genera una esfera a partir de la rotación de una figura plana.			
Entendí los ejercicios resueltos.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡excelente!; si obtuviste algunos signos (+/−) y (−), realiza un mapa conceptual con los conceptos no adquiridos, diferenciando cada cuerpo geométrico y relacionándolo con su red de construcción.

Medida

Estudiarás en este tema

- Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
- Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Lee la siguiente narración:
Observa la siguiente gráfica de la figura 4.17 que describe el consumo de gasolina de cierto automóvil:

Figura 4.17

Y para comenzar...

1. Determina la ecuación de esta gráfica.
2. En esta función, ¿cuáles son los valores de m y n? Explica.
3. ¿Qué representa el parámetro m en la gráfica anterior?

En parejas, grafiquen todas las funciones del apartado a. en el mismo plano cartesiano, y todas las funciones del apartado b. juntas, en otro plano cartesiano:

a. $y = 3x + 1$ $\quad y = 3x - 1$ $\quad y = 3x + 2$ $\quad y = 3x - 2$

b. $y = x + 5$ $\quad y = 2x + 5$ $\quad y = 3x + 5$ $\quad y = 4x + 5$

Analiza y responde: ¿Cuál es la diferencia entre ambos conjuntos de rectas? Discute, justificando y argumentando a favor o en contra de tu apreciación y la de tu compañero.

Parámetro: constante o variable que aparece en una expresión matemática y cuyos distintos valores dan lugar a diferentes casos en un problema.

Pendiente de una recta y ángulo que esta forma con el eje x

Claudio y Margarita obtuvieron un 10 en su prueba, por lo que su maestro los felicitó. "Ahora –les dijo– quiero que observen las siguientes gráficas y me digan qué relación hay entre los parámetros de cada una de las funciones lineales y los ángulos marcados en las gráficas (figura 4.18)".

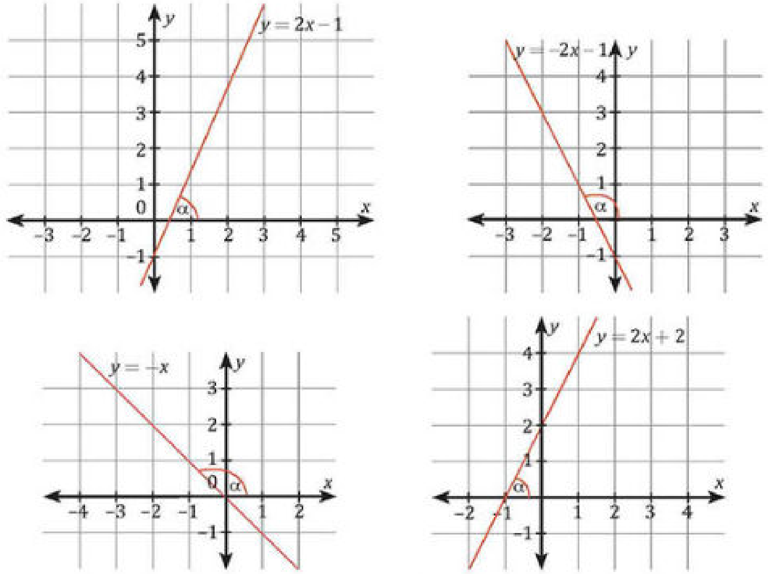


Figura 4.18

Claudio los miró por un rato, pensó y dijo: "Me parece que aquellas que tienen parámetro m positivo forman un ángulo agudo con el eje x", a lo que Margarita agregó: "Sí, y aquellas con parámetro m negativo, forman un ángulo obtuso con el eje x". ¿Qué opinas tú? ¿Estarán Claudio y Margarita en lo cierto?

Efectivamente, en matemáticas llamamos *pendiente* al parámetro m en una función lineal de la forma $y = mx + n$. La pendiente indica el grado de inclinación de la recta y, por lo tanto, nos da información sobre el tipo de ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas (o eje x).

De esta manera, si la pendiente es positiva, el ángulo formado será agudo, y si es negativa, el ángulo formado será obtuso.

Miremos ahora más detenidamente la primera gráfica dibujada en la figura 4.19. ¿Cuáles serán los puntos donde la recta corta al eje x y al eje y?

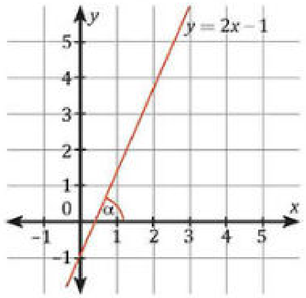


Figura 4.19

El corte con el eje y es inmediato a partir de la gráfica, y este es $(0, -1)$. Para el corte con el eje x, recordarás del bloque anterior, que los puntos sobre el eje x son de la forma $(x, 0)$ y, por lo tanto, se debe igualar y a 0 para encontrar el valor de x. Así:

$0 = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = x$. Y entonces, el punto buscado es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. De esta manera, el triángulo rectángulo formado por los ejes x e y con la recta tiene catetos 1 y $\frac{1}{2}$ (catetos sobre el eje y y sobre el eje x, respectivamente). ¿Estás de acuerdo? (recuerda que las medidas de los trazos serán siempre positivas).

Hagamos lo mismo ahora para la función $y = \frac{3}{2}x + 1$ de la figura 4.20:

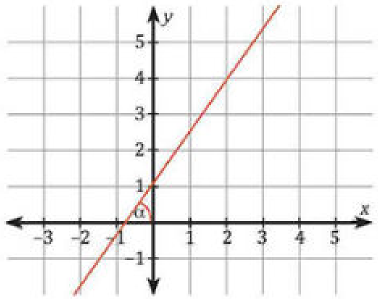


Figura 4.20

Observa esta gráfica y responde, ¿en qué punto la recta corta al eje y?

Conociendo el valor anterior, ¿qué debemos hacer para obtener el punto de corte de la recta con el eje x? Determínalo y explica a otro compañero, el procedimiento utilizado para obtenerlo. Luego, verifica estos valores.

¿Qué figura se forma por la intersección de la recta con ambos ejes?, ¿cuál es la medida de los lados de esta figura?

Ahora, ¿qué sucede si escribimos la razón entre los catetos de los triángulos formados? Escribamos la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y el otro cateto en ambos casos.

Para la primera recta, $y = 2x - 1$, se tiene que el cociente pedido será: $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$. Para la recta que acabamos de analizar, $y = \frac{3}{2}x + 1$, el cociente pedido será: $\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. ¿Puedes decir qué valores hemos obtenido?

Efectivamente, el cociente entre la medida de estos dos trazos es igual al valor de la pendiente de la recta. Pero ¿será eso siempre cierto? Realiza la siguiente actividad y compruébalo.

Habilidades a desarrollar: aplicar – calcular.

Dadas las siguientes funciones lineales, determina los puntos de corte de la recta con los ejes x e y y la razón entre los catetos $\left(\frac{y}{x}\right)$ de los triángulos formados.

i. $y = x + 5$ ii. $y = 9x + \frac{3}{2}$ iii. $y = \frac{2}{3}x - 2$

- ¿Qué pasa cuando el ángulo que forma la recta con el eje x es recto?
- ¿Y qué pasa con las rectas que son paralelas al eje x? Observa ambas situaciones en la figura 4.21:

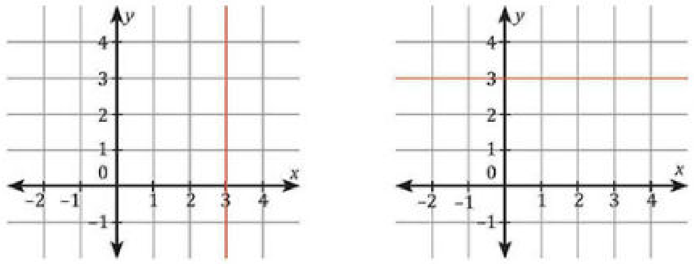


Figura 4.21
a. Recta paralela al eje y.
b. Recta paralela al eje x.

Recuerda y registra...

No olvides que si el ángulo que forma la recta con el eje x es obtuso, entonces el valor de la pendiente de esta recta es negativo.

Ninguna de estas rectas corta a los ejes coordenados, por lo tanto, no hay un triángulo rectángulo que ellas formen con el eje de las abscisas. Entonces, no podremos calcular la pendiente de ellas como lo hicimos anteriormente.

Si te fijas, cuando el ángulo se va acercando a 90°, el cateto sobre el eje x se va haciendo cada vez más cercano a cero. En el momento que la recta queda paralela al eje y, formando un ángulo de 90° con el eje x, los puntos que forman el cateto sobre el eje x coinciden, haciendo que la longitud del cateto se haga 0. Con esto, el cociente $m = \frac{y}{x}$ tendrá denominador 0 y se indefinirá. Es este el motivo, por el que en matemáticas se dice que las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

En el caso de las rectas paralelas al eje x, al girar la recta para ir haciéndola paralela al eje x, el ángulo se va acercando a 0 y son los puntos que forman el cateto opuesto al ángulo los que coincidirán, haciendo que la longitud de este cateto sea finalmente 0. Con lo que el cociente $m = \frac{y}{x}$ tendrá numerador igual a 0 y, por lo tanto, su valor será 0.

Es por esto, que en matemáticas se define la pendiente de una recta paralela al eje x como 0.

Puedes repasar y profundizar este contenido en la siguiente página web, recuperada, noviembre 11, 2013 de: *http://www.uaeh.edu.mx/docencia/VI_Lectura/bachillerato/documentos/LEC8.pdf*

Ángulos y lados de un triángulo rectángulo

Como ya aprendiste, hay una relación estrecha entre los lados del triángulo rectángulo que forma una recta con los ejes coordenados y el ángulo que ella forma con el eje de las abscisas. En esta sección aprenderemos que entre los lados y ángulos agudos de un triángulo rectángulo existe también una notable relación.

Tomemos varios triángulos rectángulos. Primero los que cumplen con el trío pitagórico 3, 4 y 5 y todos los semejantes a él. Recuerda que sus lados deben cumplir la relación que aprendiste del teorema de Pitágoras. Como son semejantes, sus ángulos interiores son iguales y sus lados son proporcionales, por lo tanto, en la figura 4.22 se tendrá que:

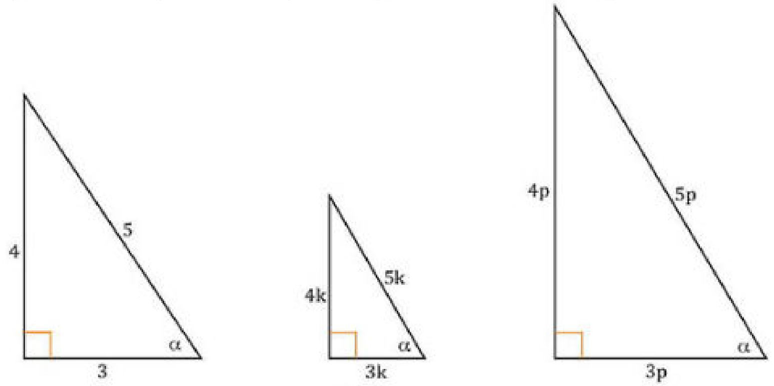


Figura 4.22

Si te fijas y calculas el cociente entre los lados opuestos al ángulo α y la hipotenusa, en todos ellos obtendrás que este cociente será $\frac{4}{5}$. El valor de este cociente será entonces independiente de la medida de los lados del triángulo, solo dependerá del valor del ángulo α.

Lo mismo sucede para los cocientes entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. En este caso su razón será, para todos los triángulos, $\frac{3}{5}$. Y para el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente a él esta será $\frac{4}{3}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Construye un triángulo rectángulo que tenga un ángulo interior agudo de 30°. Calcula los tres cocientes nombrados anteriormente con respecto a dicho ángulo.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Primero construimos el triángulo requerido, y a continuación determinamos los cocientes pedidos (figura 4.23):

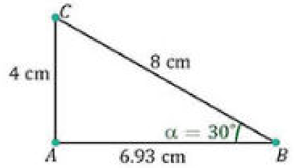


Figura 4.23

El cociente o razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa será $\frac{4}{8}$, es decir, $\frac{1}{2}$.

El cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa será $\frac{6.93}{8} \approx 0.866$.

El cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente será $\frac{4}{6.93} \approx 0.577$

2. Se ha construido un nuevo triángulo rectángulo, señalado en la figura 4.24, con un ángulo interior de 30°. Calcula los valores de las razones aludidas anteriormente.

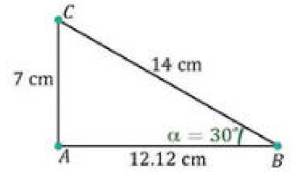


Figura 4.24

SOLUCIÓN

Procedimiento: Procedemos de inmediato a realizar el cálculo de las razones requeridas.

El cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa será $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

El cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa será $\frac{12.12}{14} \approx 0.866$.

El cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente será $\frac{7}{12.12} \approx 0.577$.

De acuerdo a los valores obtenidos en ambos problemas, el valor de los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo, ¿depende de la medida de estos lados? ¿De qué parámetro depende? Explica.

Seno, coseno y tangente

Como las razones calculadas anteriormente son tan importantes, tienen nombres propios; estos son: *seno, coseno y tangente.* Ellas nos ayudarán a calcular la medida de los lados de un triángulo rectángulo dado un ángulo y un lado o la medida de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo dados sus lados. Cálculos que hasta el momento no podíamos realizar por no tener ninguna relación entre ángulos y lados en un triángulo rectángulo. La rama de las Matemáticas que estudia estas relaciones se llama trigonometría y los cocientes nombrados se llaman razones trigonométricas.

Miremos el siguiente triángulo rectángulo de la figura 4.25.
En él distinguiremos varios elementos con respecto al ángulo α:

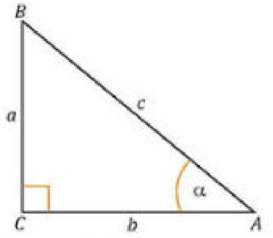


Figura 4.25

Cateto opuesto al ángulo α: a
Cateto adyacente al ángulo α: b
Hipotenusa del triángulo: c

Entonces, las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow sen\,\alpha = \frac{a}{c} \text{ (seno de } \alpha)$$

$$cos\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{b}{c} \text{ (coseno de } \alpha)$$

$$tg\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{a}{b} \text{ (tangente de } \alpha)$$

Por ejemplo, si se sabe que $cos\,\alpha = \frac{7}{20}$,
¿cuáles son las otras razones trigonométricas?

Dibujemos un triángulo rectángulo con los datos dados (figura 4.26).

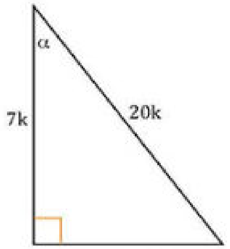
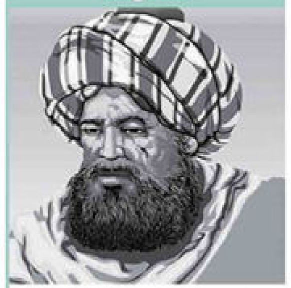


Figura 4.26

Biografía



Al-Battani (aproximadamente entre 850 y 929 n.e.).
Es considerado un gran matemático y astrónomo de la Edad Media islámica. Su gran aporte en torno a la trigonometría fue la utilización de la función seno por primera vez y la demostración de que la tangente representa la relación entre el seno y el coseno.

Nota que coseno de α es igual a cateto adyacente dividido por la hipotenusa. Además, como son razones, no quiere decir que el cateto adyacente mida 7 unidades y la hipotenusa 20, sino que pueden ser múltiplos cualesquiera de ellos, como lo vimos anteriormente. Es por esto que anotamos $7k$ y $20k$ para los lados respectivos.

Por el teorema de Pitágoras, podemos calcular el cateto opuesto al ángulo.

$(7k)^2 + x^2 = (20k)^2$

$49k^2 + x^2 = 400k^2$

$x^2 = 400k^2 - 49k^2$

$x^2 = 351k^2$

$x = \sqrt{351}\,k$

Por lo tanto, $sen\,\alpha = \frac{\sqrt{351}\cancel{k}}{20\cancel{k}} \approx 0.937$ y $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{351}}{7} \approx 2.676$

Más que...

¿Recuerdas la igualdad entre la pendiente de una recta y el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente del triángulo rectángulo que esta formaba con el eje x?
Así es, también se puede definir, entonces, la pendiente de una recta como la tangente del ángulo que forma esta con el eje x.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Después de la escuela, Beatriz va al centro comercial con sus amigas. Para subir al segundo piso toman la escalera mecánica y Beatriz dice: "podríamos calcular el largo de esta escalera si sabemos qué ángulo forma con el suelo, como nuestra maestra de Matemáticas nos enseñó hoy. Seguro nos da algunos puntos para la prueba". Si Beatriz averiguó que la escalera medía 4 m de altura y formaba un ángulo de aproximadamente 30° con la horizontal como en la figura 4.27 ¿cuál fue la medida del largo que determinó?

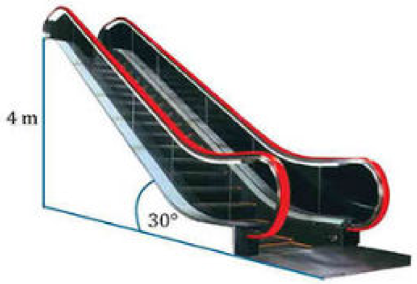


Figura 4.27

SOLUCIÓN

Procedimiento: Si consideramos que la escalera forma con el piso un triángulo rectángulo con una inclinación de aproximadamente 30°, entonces podemos escribir que:

$sen\,30° = \frac{4}{x}$, donde x corresponde al largo de la escalera.

$\frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8$

Entonces, la escalera mide aproximadamente 8 metros.

2. Una asistente de vuelo miraba detenidamente el avión en el que le tocaría viajar. Para que subieran los pasajeros, había una escalera móvil. Según los datos de la figura 4.28, ¿a qué distancia se encuentra el inicio de la escalera del avión?

Figura 4.28

SOLUCIÓN

Procedimiento: Usando los datos de la figura, podemos escribir que:

$tg\ 38° = \frac{11.3}{x}$

$tg\ 38° \approx 0.7812$ *(usando la calculadora)*

$0.7812 = \frac{11.3}{x} \Rightarrow x = \frac{11.3}{0.7812} \approx 14.46$

Por lo tanto, la escalera está aproximadamente a 14.5 m del avión.

Sabías que...

En las calculadoras científicas aparecen las funciones seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan). Con ellas puedes calcular los valores de estas funciones para cualquier ángulo.

Para realizar estos cálculos, debes tener tu calculadora en grados (deg o D).

Y para finalizar...

Se desean construir cabañas en un lugar de veraneo. Uno de los constructores, desea determinar las medidas de estas cabañas, y conociendo las medidas de su ancho y el ángulo que forma el techo de la casa con la base de esta, ha realizado el esquema de la figura 4.29.

Figura 4.29

El constructor ha determinado que la medida del largo del techo debe ser de 38.9 m y la altura de la cabaña que debe ser de 2.1 m, ambos valores aproximados a la décima.

Basándote en tus conocimientos determina si las medidas calculadas son correctas, justifica.

Comprueba tus conocimientos Tema 3

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones con el concepto o resultado correspondiente:

1 Si la pendiente de una recta es positiva, el ángulo formado con el eje x positivo se clasifica como ________________________. Por el contrario, si es negativa, según su medida dicho ángulo se clasifica como ______________________________.

2 El valor de la pendiente de una recta paralela al eje x es____________________, en cambio si es perpendicular a este eje, su pendiente es ______________________________, y el valor del ángulo correspondiente es ____________________________________.

3 Conforme a la figura 4.30:

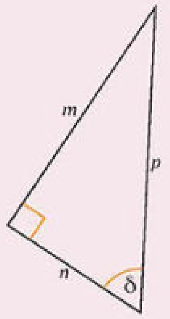


Figura 4.30

a. $sen\ \delta = -$ y _____ $= \frac{m}{n}$

b. $\frac{n}{p}$ corresponde al valor de la razón trigonométrica llamada ____________________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Mira atentamente la figura 4.31:

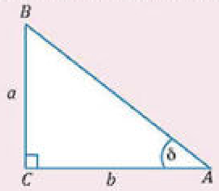


Figura 4.31

a. Define $tg\ \delta$, $sen\ \delta$, $cos\ \delta$, en función de a y b.

2 L es una recta que contiene a los puntos $F(-3, -1)$ y $G(4,6)$:

a. Haz el gráfico correspondiente destacando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

b. ¿Cuál es el signo de la pendiente según lo insinuado en el gráfico?

c. Indica los valores de los catetos del triángulo formado por los ejes y L.

d. Escribe la razón que permite obtener el valor de la pendiente.

e. ¿Entre qué valores puede encontrarse el ángulo que forma L con el eje coordenado horizontal?

3 Ana debe medir el edificio que se encuentra en su calle. Para ello ha logrado estimar que, si se coloca a 70 metros de la base del edificio, visualiza la parte superior de este con un ángulo de 25°. ¿Cuál es la altura del edificio?

4 Dibuja la recta que pasa por C: $(-1,4)$ y D:$(2,2)$ y destaca los catetos del triángulo formado por los ejes y esta recta.

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo mencionado anteriormente?

b. Anota la razón que permite obtener el valor de la pendiente.

c. Indica el valor de dicha pendiente.
Ahora bien, considera el triángulo rectángulo formado por C, D y un nuevo punto E de coordenadas $(-1,2)$:

d. escribe la razón de la longitud del cateto o vertical con respecto a la longitud del cateto horizontal. Compárala con la obtenida en b. ¿Difieren en su valor?

e. Conforme respondido en d., ¿es posible obtener el valor de la pendiente de esta recta? ¿Por qué?

5 Si δ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, cuyo cateto opuesto a él vale 6 unidades y de hipotenusa 10 unidades:

a. Encuentra el valor de *sen* δ.

b. ¿Es el valor de *cos* δ mayor que *sen* δ?

c. ¿Es *tg* δ menor que 1? Justifica tu respuesta.

6 En un triángulo rectángulo se sabe que $cos\ \alpha = 0.43$, determina, aproximando a la centésima, el valor de:

a. *sen* α

b. *tg* α

7 Dado la figura 4.32,

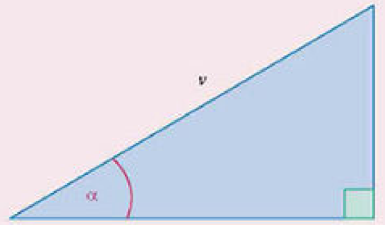


Figura 4.32

¿es verdad que el cateto:

a. opuesto a α vale $v \cdot sen\ \alpha$? Justifica tu respuesta.

b. adyacente a α es $v \cdot cos\ \alpha$? Justifica tu respuesta.

8 Si $tg\ \beta = \frac{1.732}{3}$ y $cos\ \beta = \frac{1.732}{2}$

¿Cuál es el valor de *sen* β?

9 La figura 4.33 muestra dos rectas coloreadas y los ángulos que forman con el eje horizontal. El ángulo en rojo mide aproximadamente 31°, de igual manera, el otro ángulo 63°. Usando el triángulo rectángulo que forma cada una de estas rectas con los ejes coordenados:

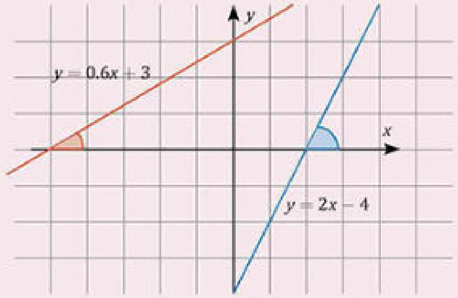


Figura 4.33

a. Determina las medidas de los catetos de cada uno de estos triángulos.

b. Encuentra los valores de las razones trigonométricas de los ángulos anteriormente mencionados.

c. Comparando el valor de las de las tangentes, ¿cuál de ellas es la de menor valor?

d. ¿Qué relación puedes establecer, para ambos casos, entre el valor de cada pendiente de la recta respectiva, con los valores de alguna de las razones trigonométricas anteriormente calculadas? Ahora bien, en cada triángulo, anota la medida del otro ángulo agudo:

e. ¿Es verdad que: *sen* 59° es igual a *cos* 31°? ¿Por qué?

f. Indica los valores de las razones trigonométricas de 27°.

10 Lamberto miró una vez más este dibujo en su prueba (figura 4.34), para averiguar la fórmula de la ecuación que contiene el segmento rojo. Midió solo el cateto menor del triángulo, y obtuvo 2.2 cm luego, intentó encontrar tal ecuación.

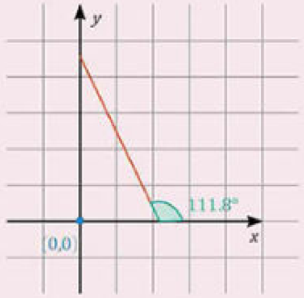


Figura 4.34

a. ¿Cuál es el valor del ángulo que te permite calcular la medida del otro cateto?

b. ¿Cuál es el signo que deber tener el valor de la pendiente de la recta roja? ¿Por qué?

c. Escribe la ecuación solicitada.

11 Montserrat encontró en el libro que ocupaba para estudiar el siguiente problema:

"Una escalera de 13,5 m de longitud llega hasta la parte superior de un muro. Si la escalera forma un ángulo de 60° con el borde superior del muro, como se muestra en la figura 4.35:

Figura 4.35

a. escribe una razón trigonométrica que permita determinar la altura del muro (*y*) y calcula dicha altura.

b. escribe una razón trigonométrica que permita determinar la distancia desde el pie de la escalera al muro (*x*) y determina dicha distancia.

12 ¡Ya hasta aquí llegamos por hoy. Vamos a tener que acampar! – gritó Moisés, nuestro instructor. Mojando mis pies en la ribera del río, y acostado de espalda, miré la copa de un árbol situado justamente enfrente mío y que estaba en la otra orilla. Cansado lo observé, con un ángulo de 60°, como nos había enseñado a estimar nuestro instructor. Wladimir, mi mejor compañero, más atrás y en línea recta, a unos 10 m de la orilla, también miraba ese árbol pero con un ángulo de 45° según lo que me dijo. Me acerqué y le susurre – te echo una competencia mañana: ¿quién atraviesa a nado el río y llega más rápido a tocar la punta del árbol? Moisés escuchó y me retó diciendo: – No tienes ni idea del ancho del río, ni lo profundo que pueda ser. Y menos la altura de la punta de ese árbol – ¡No se los permitiré! ¿No hay que correr riesgos innecesarios no? pero:

a. ¿Qué ancho tiene el mencionado río?

b. ¿Cuál es la altura del árbol?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/−	−
Soy capaz de explicar cómo se relaciona la pendiente de una recta con el ángulo que esta forma con el eje *x*.			
Soy capaz de explicar cuáles son las razones trigonométricas y para qué se usan.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			
¿Puedo construir dos figuras homotéticas?			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un cuadro resumen que incluya los principales conceptos y definiciones de este tema así como ejemplos cotidianos de cada uno de ellos.

Proporcionalidad y funciones

Estudiarás en este tema

- Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

El valor del consumo de energía eléctrica en nuestro país se realiza, de acuerdo al consumo de los kilowatts-hora, de la siguiente manera:

Mínimo mensual:	El equivalente a 25 kilowatts-hora
Consumo básico:	\$0.786 por cada uno de los primeros 75 kilowatts-hora.
Consumo intermedio:	\$0.957 por cada uno de los siguientes 65 kilowatts-hora.
Consumo excedente:	\$2.799 por cada kilowatt-hora adicional a los anteriores.

Fuente: http://app.cfe.gob.mx/Aplicaciones/CCFE/Tarifas/Tarifas/Tarifas_casa.asp?Tarifa=DACTAR1&anio=2013
Recuperada, noviembre 11, 2013.

Y para comenzar...

1. ¿Qué clase de variación es la que representa esta situación?
2. ¿Cuál es el valor mínimo mensual que se debe pagar?

En parejas, realiza las siguientes actividades, de acuerdo a la información entregada inicialmente:

1. Calculen y representen en una tabla los valores para los primeros 10 kilowatts-hora.
2. Coloquen los puntos de la tabla en un plano cartesiano para confeccionar una representación gráfica.
3. ¿A qué corresponde el valor 0.786? Expliquen detalladamente.
4. Determinen, explicando cada paso, la forma algebraica de esta relación.
5. Determinen el valor para la cual la gráfica interseca al eje y. Justifiquen.

Para abordar este nuevo tema debes dominar los contenidos sobre variaciones lineales, así como los parámetros característicos de este tipo de gráficas.

Razón de cambio

De acuerdo al gráfico que obtuvieron anteriormente, podemos calcular qué cantidad de dinero más, se debe pagar al aumentar un kilowatt-hora de consumo. Si comparamos el aumento de dinero cada vez que se utiliza un kilowatt-hora más, te darás cuenta que este aumento corresponde a \$0.786. Si escribimos la razón entre la diferencia del valor inicial cancelado y el valor final y la variación de kilowatt-hora que se ha consumido, tendremos que:

$$r = \frac{\text{variación del valor a pagar}}{\text{variación kilowatt-hora consumidos}}$$

Para la variación del primer kilowatt-hora se tendrá que $r = \frac{0.786}{1}$

Para la variación del segundo kilowatt-hora, $r = \frac{1.572}{2} = \frac{0.786}{1}$

¿Es lógico esto? Por supuesto que sí, como el aumento del valor por cada kilowatt-hora es el mismo, esta razón es constante.

A esta razón la llamaremos ***razón de cambio***. Por lo tanto, definiremos razón de cambio entre dos variables como aquella medida en la que una variable varía con respecto a la variación de la otra.

Si marcamos en el gráfico anterior los segmentos que estamos comparando a través de la razón de cambio, tendremos la figura 4.36:

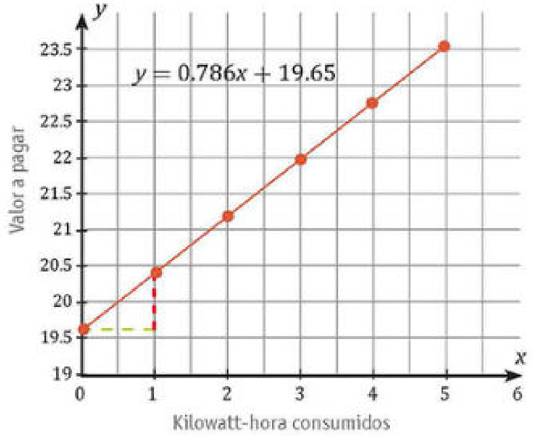


Figura 4.36

Observa bien. ¿Qué representan los segmentos marcados con rojo y con verde? ¿Y el cociente entre el segmento rojo y el verde?

Efectivamente, los segmentos rojo y verde representan los catetos del triángulo rectángulo formado, y el cociente entre ellos corresponde a la pendiente de la recta. ¿Lo recuerdas del tema anterior?

Por lo tanto, la razón de cambio entre dos variables que se modelan a través de una función lineal será la pendiente de la recta que ella representa.

Además, la recta corta al eje de las ordenadas (eje y) en el punto (0,19.65). Recuerda que para este punto $x = 0$, entonces el valor de y corresponderá al parámetro n en la ecuación de la recta $y = mx + n$ o función que la representa. Por lo tanto, como la razón de cambio es $r = 0.786$ y la recta forma un ángulo agudo con el eje x, su pendiente debe ser positiva.

Estrictamente, si tomamos dos pares de valores de la tabla y escribimos las diferencias entre ellos, tendremos que:

$$r = \frac{\text{valor a pagar inicialmente} - \text{valor a pagar al consumir 1 kilowatt-hora}}{\text{kilowatt-hora consumidos inicialmente} - \text{primer kilowatt-hora consumido}} =$$

$$= \frac{19.65 - 20.436}{0 - 1} = \frac{-0.786}{-1} = 0.786$$

Entonces, como ya lo verificaste, podemos escribir que la función que representa el valor a pagar en consumo de energía se modela a través de $y = 0.786x + 19.65$, donde x corresponde a la cantidad de kilowatt-hora utilizados e y el valor a pagar según la cantidad x de kilowatt-hora consumidos.

Si te fijas, en este caso la razón de cambio representa un aumento o crecimiento, ya que la pendiente de esta recta es positiva, ¿crees que la razón de cambio pueda representar una disminución o decrecimiento? Justifica y verifica tu respuesta con tu maestro.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Marta está ahorrando dinero para sus vacaciones. Ella se ha propuesto guardar cada 15 días una cierta cantidad de dinero. Si en los primeros 15 días ahorró $ 220, a los 30 días ahorró $ 236, después ahorró $ 252, luego $ 268 y así hasta el término de su año, determina:

   a. ¿En qué razón cambia el dinero que Marta va ahorrando cada 15 días?

   b. ¿En qué razón cambia el dinero total ahorrado por Marta cada 15 días? ¿Es la misma razón calculada en la pregunta anterior? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN

Procedimiento:

a. Calculemos la razón de cambio entre los primeros 15 días y la 2ª vez que ahorró. Para esto, debemos calcular la diferencia entre el dinero ahorrado y la diferencia entre los días en que ahorró:

$$r_1 = \frac{236 - 220}{30 - 15} = \frac{16}{15}$$

¿Será la misma para el resto de las veces en que ahorró? ¿O para los días que transcurrieron entre la primera vez que ahorró y la cuarta?

$$r_2 = \frac{252 - 236}{45 - 30} = \frac{16}{15}, r_3 = \frac{268 - 220}{60 - 15} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}$$

Observa que como la razón de cambio es constante para cualquier período que se tome, la función que relaciona el dinero que ahorra con el día en que lo ahorra es una función lineal y su gráfica, entonces, será una recta de pendiente $m = \frac{16}{15}$.

b. Fíjate que nos preguntan por el total ahorrado, esto es, si lo representamos en una tabla:

Día del ahorro	Total ahorrado ($)
15	220
30	456
45	708
60	976

Calculemos, entonces, la razón de cambio entre el 1er y el 2° ahorro:

$$r_1 = \frac{456 - 220}{30 - 15} = \frac{236}{15}$$

Claramente, el dinero total ahorrado no cambia en la misma razón que el dinero ahorrado cada vez. Pero ¿será constante también la razón del dinero total ahorrado en distintos períodos? Calculemos otros períodos, por ejemplo, entre el dinero total a los 15 días y a los 45:

$$r_2 = \frac{708 - 220}{45 - 15} = \frac{488}{30} = \frac{244}{15}$$

Como las razones no son las mismas, la función que modela esta situación NO es lineal y, por lo tanto, no hay una razón de cambio para todos los períodos (que sea la misma para todos).

2. Pedro está entrenando hace algún tiempo. A él le gusta salir a correr por su vecindario y ha notado que sus tiempos han mejorado semana a semana para la misma ruta. Él ha anotado sus marcas, nosotros te las mostramos aquí:

Semana	Tiempo (min)
1	30
2	27
3	24
4	21

   a. ¿Cuál es la razón de cambio entre la 2ª y la 4ª semana?

   b. ¿Cuál es la función que modela esta situación? ¿Puedes determinarla con los datos dados sin necesidad de confeccionar la gráfica?

   c. Calcula el tiempo que se demorará en recorrer la misma ruta durante la 6ª semana.

SOLUCIÓN

Procedimiento

a. Para calcular esta razón de cambio debemos determinar la diferencia entre los tiempos obtenidos y la diferencia entre el tiempo transcurrido, esto es:

$$r = \frac{\text{diferencia de tiempos}}{\text{diferencia de semanas}} = \frac{27 - 21}{2 - 4} = \frac{6}{-2} = -\frac{3}{1}$$

Pero ¿qué indica que la razón sea negativa? Indica que el tiempo que demora en hacer su recorrido va disminuyendo a medida que aumentan las semanas. Entonces esta disminución no es proporcional, por lo tanto, estas variables no son inversamente proporcionales (de hecho, su producto no es constante).

b. Si tomamos varios pares de valores, esto es, las dos primeras semanas, luego la 2ª y la 3ª semana, después la 3ª y la 4ª, y hacemos las razones de cambio para ellos, tendremos que:

$r_1 = \frac{30-27}{1-2} = -\frac{3}{1},\ r_2 = \frac{27-24}{2-3} = -\frac{3}{1},\ r_3 = \frac{24-21}{3-4} = -\frac{3}{1}$

Nota que todas ellas son iguales, es decir, la razón de cambio es constante para los diferentes pares de valores de las variables, lo que quiere decir que la función que modela nuestro problema es una función lineal y su gráfica una recta, donde su pendiente es justamente la razón de cambio que acabamos de determinar, es decir, -3.

Por lo tanto, la función será de la forma $y = -3x + n$.
¿Cómo determinar el parámetro n?

Muy sencillo, tomemos uno de los pares de valores. Como ya sabemos que en la semana 1 Pedro hizo un tiempo de 30 minutos, entonces, sabemos que $y = 30$ y $x = 1$. Podemos entonces remplazar estos valores en la función $y = -3x + n$:

$30 = -3 \cdot 1 + n \quad \Rightarrow \quad 30 = -3 + n \quad \Rightarrow \quad 33 = n$

Por lo tanto, la función pedida será: $y = -3x + 33$

c. Recuerda que ya obtuviste la razón de cambio para este problema, de acuerdo a este valor, ¿cuánto tiempo debería demorarse en recorrer esta ruta durante la 6ª semana? Verifica tu respuesta con el valor obtenido utilizando la ecuación que determinaste en la letra **b.** de este ejercicio.

Y para finalizar...

El gráfico de la figura 4.37 muestra dos rectas de depreciación del valor de un automóvil con el tiempo, de dos automotoras distintas:

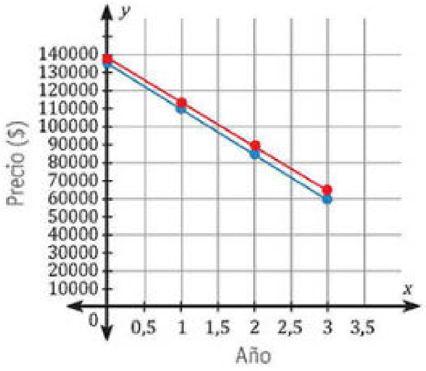


Figura 4.37

1. Plantea la relación algebraica de ambas rectas y determina en cuál de los dos casos esta depreciación es menor.
2. ¿En qué automotora conviene más comprar el automóvil? Justifica.

Comprueba tus conocimientos Tema 4

I. Coloca verdadero (V) o falso (F) frente a cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda:

1 ___ La razón de cambio entre dos variables mide la variación de una variable con respecto a la variación de la otra.

2 ___ La razón de cambio entre dos variables siempre toma valores positivos.

3 ___ Si la razón de cambio entre dos variables es constante, entonces entre ellas hay una variación lineal.

4 ___ La pendiente de una recta y su respectiva razón de cambio pueden diferir en sus signos.

5 ___ Cuando la razón de cambio es igual a 1, las variables son directamente proporcionales.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Si $y = -\frac{4}{5}x - 2$, encuentra la razón de cambio de:

a. x con respecto a y.

b. y con respecto a x.

2 La relación que existe entre una temperatura medida en grados Celsius (T_C), y la misma pero en grados Fahrenheit (T_F), es la siguiente: $\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180}$.

a. ¿A cuántos grados Celsius equivalen 212 grados Fahrenheit?

b. ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 50 grados Celsius?

c. Encuentra una ecuación que permita conocer la variación de una temperatura expresada en grados Fahrenheit, con respecto a la misma variación de temperatura pero expresada en grados Celsius.

3 A continuación se muestra la cantidad de litros de refresco (l) que se utiliza en una fiesta, de acuerdo al número de personas que asistieron.

Numero de Asistentes	Litros de refresco (l)
5	12.5
10	25
15	37.5
20	50

a. Calcula la razón de cambio.

b. ¿Se puede afirmar que la variación es lineal? Justifica tu respuesta.

4 La siguiente tabla representa la relación entre dos variables, x e y:

x	y
2	−2
5	7
10	12
12	28

a. Representa gráficamente esta relación.

b. Escribe la razón de cambio entre las variables.

c. Escribe algebraicamente la función que modela esta relación.

5 Un móvil se mueve durante cuatro segundos a través de un riel recto, donde su posición de alejamiento de un punto de referencia está en función del tiempo. Los detalles están presentados en la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	5
1	9
2	13
3	17
4	21

a. Encuentra la razón de cambio.
b. ¿Cómo interpretas el valor anteriormente obtenido?
c. ¿Se puede afirmar que en el tiempo de duración del movimiento la distancia varía linealmente con el tiempo? Justifica tu respuesta.
d. ¿Cuántos metros ha recorrido cuando han transcurrido 3.5 s?
e. Considera el intervalo de tiempo comprendido entre los 2 y 4 segundos. ¿Es posible calcular la razón de cambio y obtener un valor diferente? ¿Por qué?
Ahora bien, supongamos que el movimiento continúa hasta los 10 segundos, con el mismo valor de la razón de cambio que obtuviste en **a.**:
f. ¿Se puede determinar a los cuantos segundos de iniciado el movimiento, estará a 41 m del punto referencia?

6 Casilda es una de mis compañeras más aventajada de clase. Con ella estábamos completando la siguiente tabla que nuestra maestra de Matemáticas nos mostraba en el pizarrón.

x	y
0	
1	
2	3
5	
7	

Teníamos que completarla usando la razón de cambio de valor $\frac{3}{4}$ sabiendo que y varia linealmente con x. Entonces ella cambió el valor anterior por $\frac{0.75}{1}$, si tal como ustedes ven, destacó el número 1 en rojo, y reflexionó de la siguiente manera: –por cada una unidad de aumento en la variable x, hay un aumento de 0.75 en la variable y, por cada dos unidades de aumento la variable x, hay un aumento de 1.50 en la otra variable, y así sucesivamente –se sonrió, y dijo– lo mismo ocurre, por cada una unidad de disminución en la variable x, también hay una disminución de 0.75 en el valor de la otra variable, de la misma manera si se sigue disminuyendo. Ahora tú:

a. Completa la tabla, e indica si estás de acuerdo o no con este criterio. ¿Por qué?
b. Escribe la ecuación que relaciona la variable y con la otra variable.
c. Inventa una pregunta y da su respuesta, tomando en cuenta toda la información de este problema.

7 Después de observar una de las fotocopiadoras automáticas de trabajo continuo, Abel, un técnico especializado de la empresa en este tipo de máquinas, descubre que por un defecto de funcionamiento, la producción disminuye en un número constante de fotocopias por hora, arrojando 4 770 durante una hora de funcionamiento en que esta fotocopiadora presentó desperfectos. Si el tiempo de funcionamiento es de 10 horas continuas, el número de fotocopias se reduce a 4 500.

a. Escribe la razón de cambio que permite conocer la producción de fotocopias con respecto a las horas de funcionamiento.
b. Interpreta el valor anterior y el signo respectivo.
c. Escribe una ecuación que relaciona el número de fotocopias P con respecto a la cantidad de tiempo t, medido en horas.
d. Inventa una pregunta y da su respuesta, tomando en cuenta toda la información de este problema.

8 Observa el aviso publicitario y responde:

a. Representa gráficamente esta relación.
b. Escribe la razón de cambio entre las variables.
c. Escribe algebraicamente la función que modela esta relación, dejando como variable y el valor del minuto y como variable x el tiempo de llamada.

Llamadas (minutos)	2	4	5	9
valor en $	1.5	3	3.75	6.75

9 José es estudiante de sicología. Asiste a una conferencia sobre dificultades de aprendizaje dictada por un afamado doctor en Psicología y escucha lo siguiente:

Al hacer mi experimento de aprendizaje con alguno de mis pacientes, que involucraba la repetición y la memoria, llegué a estimar que la proporción de p de elementos recordados se relaciona linealmente con un tiempo de estudio que asigne a cada uno. Este tiempo lo llamé tiempo efectivo t, donde t varía entre los 5 y 9 minutos. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 minutos, la proporción de elementos recordados fue, en promedio de 0.32. También me di cuenta que por cada minuto más en el tiempo de estudio, la proporción recordada, aumentaba en 0.059. Así estimados asistentes determiné que tal relación es $p = 0.059t + 0.025$

Entonces les puedo relatar que la proporción de elementos recordados que se estimada con 9 minutos de tiempo efectivo de estudio es más de 0.5

Conforme a lo que has escuchado junto a Filipo:

a. ¿Es correcta la relación entre p y t? Justifica matemáticamente tu respuesta.
b. ¿Por qué en la ecuación anterior, necesariamente aparece el valor 0.059? ¿Cuál es su interpretación?
c. ¿Es correcta la aseveración acerca de la proporción de elementos recordados con nueve minutos de tiempo efectivo de estudio?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Puedo explicar qué es una razón de cambio.			
Puedo explicar para qué sirve calcular una razón de cambio.			
Puedo explicar qué representa una razón de cambio para dos variables que se relacionan mediante una función lineal.			
Entendí los ejercicios resueltos.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un esquema con los conceptos no adquiridos en el que definas con tus palabras qué es una razón de cambio y entregues ejercicios con su resolución.

Análisis y representación de datos

Estudiarás en este tema

- Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de dispersión.

Lee el relato que te presentamos:

En México, y en el mundo probablemente, uno de los deportes más populares es el fútbol. En México, las estadísticas reportan al fútbol como el deporte más popular seguido por el basquetbol. Aún siendo el deporte más popular, México sobresale en otros deportes como el box o la lucha libre. A continuación te mostramos las preferencias de los mexicanos en los distintos deportes según su popularidad.

DEPORTES		% MEXICANOS A LOS QUE LES GUSTA VER, JUGAR O ESTAR ENTERADO DE...				
		MAR/07	ENE/08	ENE/09	ENE/10	ENE/11
	Futbol	57.8	60.9	58.1	61.8	60.1
	Box	31.9	29.7	33.9	39.8	44.1
	Beisbol	32.8	26.6	30.2	31.6	29.4
	Basquetbol	41.8	34.5	30.6	33.0	26.8
	Futbol americano	21.4	18.2	17.0	20.3	18.0
	Golf	9.6	8.5	6.2	10.0	6.4

Y para comenzar...

1. Según los datos de la tabla, ¿cuáles deportes han aumentado su popularidad a través de los años y cuáles la han disminuido?
2. Calcula el valor de la media para el Golf y para el Fútbol, y compáralas.

En parejas realicen las siguientes actividades:

1. A partir de los datos de la tabla, calculen la media de cada deporte a través de los años y compárenlas entre sí.
2. Establezcan dos conclusiones a partir de los valores obtenidos para el valor de las medias de cada deporte. Justifiquen su elección y en una puesta en común, compartan con el resto de la clase sus conclusiones.

Para ampliar los conocimientos sobre la media de un conjunto de datos y la información que nos entrega es necesario que comprendas muy bien este concepto.

Desviación media y rango

Pamela observó los resultados de las encuestas que ella y una de sus compañeras, Viviana, hicieron para la tarea de su clase de Matemáticas. Ambas decidieron estudiar el comportamiento de los niños menores de 10 años en relación con las horas de televisión que veían diariamente. Observa sus resultados:

Horas de televisión	Pamela	Viviana
	Número de niños	Número de niños
1	35	15
2	42	78
3	15	2
4	5	3
5	3	2

Los cálculos que hicieron Pamela y Viviana sobre la media de sus muestras fueron los siguientes:

Pamela:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 35 + 2 \cdot 42 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{100} = \frac{199}{100} = 1.99$$

Viviana:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 78 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{100} = \frac{199}{100} = 1.99$$

Como ves, ambas obtuvieron la misma media para sus muestras y ambas, por supuesto, concluyeron que los niños encuestados no veían mucha televisión, ya que 2 horas diarias era un cantidad razonable. Pamela pensó, entonces, que los dos grupos de niños se comportaban de la misma forma en relación con el hecho de ver televisión.

¿Crees que basta el valor promedio o media para concluir en este caso? Según tu opinión, ¿el comportamiento de ambos grupos de niños es el mismo cuando se trata de las horas que ven televisión?

Tal como lo has pensado, ambos grupos de niños se comportan de manera distinta en relación con las horas que dedican a ver televisión y el promedio no es suficiente para concluir sobre este punto. Como ya has visto, las muestras son distintas, sin embargo, el valor de sus medias es el mismo. Si te fijas bien, en el grupo de Pamela hay un 15% de la muestra que ve 3 horas de televisión, en cambio, en el grupo de Viviana, los niños que ven 3 horas de televisión son solo el 2%. Lo que, por supuesto, hace diferencia.

Entonces, ¿qué otros elementos ayudan a describir mejor una muestra? Existen los llamados ***estadígrafos de dispersión***. Ellos nos dan información sobre el grado de dispersión de la muestra, es decir, sobre cómo se distribuyen los datos. Es distinto, como ya lo viste, que la mayoría de los datos se aglutinen en torno a un valor o que se distribuyan de manera más homogénea entre los distintos valores de la variable en estudio.

En esta sección estudiaremos dos de los estadígrafos de dispersión que existen. Ellos son:

Rango

El rango de una muestra es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la muestra. Aunque el rango nos da información sobre cuán distantes pueden estar los datos, no siempre es la mejor medida para la dispersión de ellos.

Por ejemplo, si observamos las muestras anteriores, te darás cuenta que para ambas el menor valor es 1 y el mayor es 5, por lo tanto, su rango será: Rango $= 5 - 1 = 4$

Es evidente que solo con este valor no podremos asegurar que los valores de ambas muestras se distribuyen de la misma manera.

Ahora, observa bien. Supongamos que tenemos otro grupo de niños con el siguiente comportamiento frente a las horas que dedican a ver televisión:

Horas de televisión	Número de niños
1	26
2	49
3	25
4	0
5	0

En esta muestra tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 26 + 2 \cdot 49 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{100} = \frac{199}{100} = 1.99$$

Rango $= 3 - 1 = 2$ (nota que no existen valores mayores 3, ya que no hay niños que vean 4 o 5 horas de televisión).

En este caso, aun cuando la media sigue siendo igual que en las muestras anteriores, el rango es menor. Esto quiere decir que en este último caso los valores claramente se concentran entre 1 y 3 horas, por lo tanto, los valores de esta muestra estarían menos dispersos que en las otras dos.

Claramente, necesitamos otro valor que nos ayude a determinar la dispersión de los datos para poder concluir con mayor exactitud.

Habilidades a desarrollar: determinar.

La siguiente información proviene de una encuesta realizada a 25 familias, y corresponde al número de personas que trabajan en cada familia:

0	2	2	4	4
1	3	5	3	5
4	1	2	4	2
0	1	2	0	2
1	5	2	3	1

Determina el rango.

Desviación media

Pensemos un instante. ¿Qué es la media?, ¿cómo crees tú que se encontrarán los datos con respecto a la media si ellos son muy dispersos?, ¿y si son muy homogéneos?

Si bien la media es un valor representativo, también cambia rápidamente si hay valores extremos en la muestra. Por eso es importante ver qué tan distantes están cada uno de los valores de la muestra.

En matemáticas medimos la distancia que hay entre un número y otro con el valor absoluto de la diferencia entre ellos (recuerda que las distancias deben ser positivas).

En una muestra nos interesará determinar cuán alejado está cada valor de la muestra del promedio. Entonces, llamaremos ***desviación media*** *(DM)* al promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada dato de la muestra y el promedio. Así:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

donde $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ son los datos de la muestra y n es el tamaño de la muestra.

¿Qué significa esta fórmula? Piensa en lo siguiente: cuando tenemos los datos ordenados en una tabla y sabemos que la frecuencia del dato 1 es, por ejemplo, 30, deberíamos hacer $|1 - \bar{x}|$ y sumarlo 30 veces, lo que es muy tedioso. Entonces es más sencillo calcular dicha diferencia y multiplicarla por 30.

Nota que mientras más cercano a 0 sea este valor, más homogénea será la muestra. Es decir, los datos se encontrarán más cercanos al promedio.

Calculemos la desviación media para los tres grupos de niños estudiados anteriormente:

Para la muestra de Pamela:

$$DM = \frac{|1 - 1.99| \cdot 35 + |2 - 1.99| \cdot 42 + |3 - 1.99| \cdot 15 + |4 - 1.99| \cdot 5 + |5 - 1.99| \cdot 3}{100}$$

$$DM = \frac{0.99 \cdot 35 + 0.01 \cdot 42 + 1.01 \cdot 15 + 2.01 \cdot 5 + 3.01 \cdot 3}{100}$$

$$DM = \frac{69.3}{100} = 0.693$$

Para la muestra de Viviana:

$$DM = \frac{|1 - 1.99| \cdot 15 + |2 - 1.99| \cdot 78 + |3 - 1.99| \cdot 2 + |4 - 1.99| \cdot 3 + |5 - 1.99| \cdot 2}{100}$$

$$DM = \frac{0.99 \cdot 15 + 0.01 \cdot 78 + 1.01 \cdot 2 + 2.01 \cdot 3 + 3.01 \cdot 2}{100}$$

$$DM = \frac{29.7}{100} = 0.297$$

Valor absoluto: el valor absoluto de un número es la distancia que hay entre este número y el cero en la recta numérica. Por lo tanto, siempre es positivo. El valor absoluto del número x se denota como: $|x|$

Para el último grupo:

$$DM = \frac{|1 - 1.99| \cdot 26 + |2 - 1.99| \cdot 49 + |3 - 1.99| \cdot 25}{100}$$

$$DM = \frac{0.99 \cdot 26 + 0.01 \cdot 49 + 1.01 \cdot 25}{100}$$

$$DM = \frac{51.48}{100} = 0.5148$$

Si comparamos las muestras de Pamela y Viviana, que tienen el mismo rango, podemos decir que la de Viviana es más homogénea. Es decir, los valores de la variable en la muestra de Viviana se concentran cerca del valor 2 (recuerda que 1.99 es la media), ya que su desviación media es menor que la de la muestra de Pamela.

Las muestras de Pamela y Viviana no son fácilmente comparables con la tercera muestra estudiada, ya que no poseen el mismo rango. Sin embargo, 0.5 es aún un valor pequeño (recuerda que el mínimo valor que puede tomar la desviación media es 0 y que no hay un valor máximo para ella), por lo tanto, podríamos decir también que no hay mucha variación entre los datos y la media, considerando el rango que es 2, la media que es 1.99 y que los valores de la variable se mueven entre 1 y 3.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Con la siguiente fórmula se desea calcular el valor de la *DM*, pero no se conoce toda la información:

$$DM = \frac{2 \cdot |1 - 5| + 6|2 - 5| + 7|6 - 5| + 4|9 - 5| + 1|8 - 5|}{\text{------}}$$

a. ¿Cuál es el tamaño de la muestra? (dato faltante en la fórmula)

b. ¿Cuál es el valor del rango?

c. ¿Cuál es el valor de la *DM*?

SOLUCIÓN

Procedimiento

a. Si te fijas en la fórmula, cada valor absoluto está multiplicado por la frecuencia de ese dato, así, construiremos una tabla con los valores dados en la fórmula, de modo que te resulte más fácil analizar esta situación.

Frecuencia absoluta	Dato
2	1
6	2
7	6
4	9
1	8

A partir de los datos, el tamaño de la muestra será:
$2 + 6 + 7 + 4 + 1 = 20$

b. En este conjunto de datos, el mayor valor corresponde a 9 y el menor valor corresponde a 1. De esta manera: Rango $= 9 - 1 = 8$

c. Si completamos la fórmula dada con el tamaño total de la muestra, tendremos:

$$DM = \frac{2 \cdot |1 - 5| + 6 \cdot |2 - 5| + 7 \cdot |6 - 5| + 4 \cdot |9 - 5| + 1 \cdot |8 - 5|}{20} = 2.6$$

2. La empresa en la que trabaja Clara hizo una encuesta sobre la higiene bucal en niños, jóvenes y adultos de la ciudad de Colima. Para ello encuestaron a 200 personas de cada una de las categorías antes mencionadas y les consultaron cuántas veces al día se lavan sus dientes. Los resultados fueron los siguientes:

Número de lavados	Niños	Jóvenes	Adultos
1	26	113	15
2	88	54	109
3	51	21	67
4	35	12	9

Clara debe determinar cuál es la muestra con datos más homogéneos y escribir algunas conclusiones. ¿Podemos ayudarla?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Muy bien, como verás, las tres muestras tienen igual rango, que es: rango $= 4 - 1 = 3$. Calculemos, entonces, la media y la desviación media para cada una de las muestras:

Para los niños:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 26 + 2 \cdot 88 + 3 \cdot 51 + 4 \cdot 35}{200} = \frac{495}{200} = 2.475 \approx 2.5$$

$$DM = \frac{|1 - 2.5| \cdot 26 + |2 - 2.5| \cdot 88 + |3 - 2.5| \cdot 51 + |4 - 2.5| \cdot 35}{200}$$

$$DM = \frac{1.5 \cdot 26 + 0.5 \cdot 88 + 0.5 \cdot 51 + 1.5 \cdot 35}{200} = \frac{161}{200} = 0.805$$

Para los jóvenes:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 113 + 2 \cdot 54 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 12}{200} = \frac{332}{200} = 1.66 \approx 1.7$$

$$DM = \frac{|1 - 1.7| \cdot 113 + |2 - 1.7| \cdot 54 + |3 - 1.7| \cdot 21 + |4 - 1.7| \cdot 12}{200}$$

$$DM = \frac{0.7 \cdot 113 + 0.3 \cdot 54 + 1.3 \cdot 21 + 2.3 \cdot 12}{200} = \frac{150.2}{200} = 0.751$$

Para los adultos:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 109 + 3 \cdot 67 + 4 \cdot 9}{200} = \frac{470}{200} = 2.35 \approx 2.4$$

$$DM = \frac{|1 - 2.3| \cdot 15 + |2 - 2.3| \cdot 109 + |3 - 2.3| \cdot 67 + |4 - 2.3| \cdot 9}{200}$$

$$DM = \frac{1.3 \cdot 15 + 0.3 \cdot 108 + 0.7 \cdot 67 + 1.7 \cdot 9}{200} = \frac{114.4}{200} = 0.5702$$

Podemos decir entonces que los adultos son los que presentan un comportamiento más parejo u homogéneo. Esto es, que los valores están más cercanos a la media que en los otros grupos. En este caso, de 2 lavados por día.

Podemos decir que el grupo de los jóvenes presenta una desviación media un poco mayor que la de los adultos, por lo que el comportamiento de los jóvenes sería menos homogéneo entre ellos, siendo el promedio de lavados entre 1 y 2, con una mayor tendencia hacia los 2 lavados.

En cambio, el grupo de los niños, que presenta una desviación media mayor, se comporta menos homogéneo. Si bien su media es 2.5, entre 2 y 3 lavados diariamente, existe una mayor variedad en la conducta de limpieza bucal, probablemente influida por los padres y los hábitos que ellos desean formar en sus hijos al respecto.

Para investigar más sobre este tema puedes visitar el siguiente link. Recuperado, marzo 5, 2013, de: *http://pendientedemigracion.ucm.es/info/genetica/Estadistica/estadistica_basica%202.htm*

Y para finalizar...

En grupos de cuatro integrantes, contesten las preguntas que se formulan, según la siguiente información:

Se desean instalar pequeños centros de albergues turísticos en las cercanías de unas famosas ruinas históricas. Para evitar el impacto ambiental de cualquier índole hacia ellas, la comisión encargada está analizando dos propuestas que indicarían las distancias en que debieran situarse dichos centros de las mencionadas ruinas.

La primera de ellas es la llamada Propuesta Azul. Sugiere que los cuatro primeros centros debieran ubicarse a: 14.7; 7.9; 5.2 y 3.2 km, en línea recta y hacia el Norte de tales ruinas. Ahora bien, en sentido contrario, a 2.3; 6.7; 8.8 y 13.2 km los restantes.

Análogamente, en la Propuesta Roja, se indicaría que dichas instalaciones turísticas de los primeros centros debieran estar a: 12.6; 11.2; 5.5 y 1.7 km, en línea recta y hacia el Norte de las ruinas; y a 2.5; 5.9; 7.2 y 15.4 km, los segundos.

El criterio de selección señala que debe ser elegida aquella propuesta, tal que el conjunto de sus albergues esté lo más distante posible de las famosas ruinas.

1. Uno de los integrantes de la comisión sugiere simplemente optar por aquella propuesta que señale, la distancia mayor entre sí, de los albergues que se hallan más lejos de las ruinas.
   - **a.** ¿Qué opinan a este respecto?
   - **b.** ¿Cuál de ellas elegirían? ¿Por qué?
2. Escojan cualquiera de estas propuestas y cambien las posiciones de dos albergues de ella, de tal modo que notoriamente cumpla el criterio, frente a la otra.
3. Hagan su propia propuesta de manera competitiva con los otros grupos de tu clase. Pueden sugerir además, un segundo criterio de selección (por ejemplo que las dos más cercanas a las ruinas, la más cercana hacia el Norte y la más cercana hacia el Sur, estén lo más lejos posible entre sí).

Comprueba tus conocimientos Tema 5

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda.

1 El ____________ y la ____________ dan información de cómo se distribuyen los datos.

2 El rango de una muestra se calcula como ________________________.

3 Aunque el rango da información sobre cuán distantes pueden estar los datos, una de las dificultades que presenta es que ________________________.

4 La __________________ corresponde al promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada dato de la muestra y el promedio.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 La tabla que se presenta a continuación corresponde al número de pacientes atendido por cierto centro de urgencias de Tabasco durante el mes de mayo del 2013, conforme a las edades que ellos tenían:

Rango de edades	Edad promedio	Número de personas
Menores de 10 años	7	17
De 10 a 20 años inclusive	16	14
Mayores de 20 hasta 40 años inclusive	32	13
Mayores de 40 hasta 60 años inclusive	49	25
Mayores de 60 hasta 80 años inclusive	73	21

a. Indica el valor del rango

b. ¿Cuál es el valor de la DM?

2 El director de la escuela adonde asisten Marcia y Mariana está ansioso por saber el informe final del test regional de Matemáticas que rindieron los dos cursos de tercero de secundaria. Sabe que la escala es de 0 a 100, con un mínimo de aprobación de 70. Los resultados fueron los siguientes:

CLASE de Mariana

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	89	75	94	77	69	74	68	60

CLASE de Marcia

96	78	67	61	75	95	60	79	83	71
79	62	73	97	78	85	76	65	71	75
65	62	82	57	88	78	62	76	53	74
86	80	73	81	72	63	76	76	85	77

El director les ha mostrado los resultados y les ha dicho que, de acuerdo a los conocimientos adquiridos, deben elaborar un informe que contenga, además de los promedios, la cantidad de alumnos que reprobaron y el número de alumnos destacados.

Ahora ayuda tú a los alumnos de esta escuela y además determina:

a. Los valores del rango en cada muestra.

b. Conforme a los valores de los rangos, da una estimación de qué tan variables estuvieron los resultados en cada clase.

c. Obtén cada desviación media.

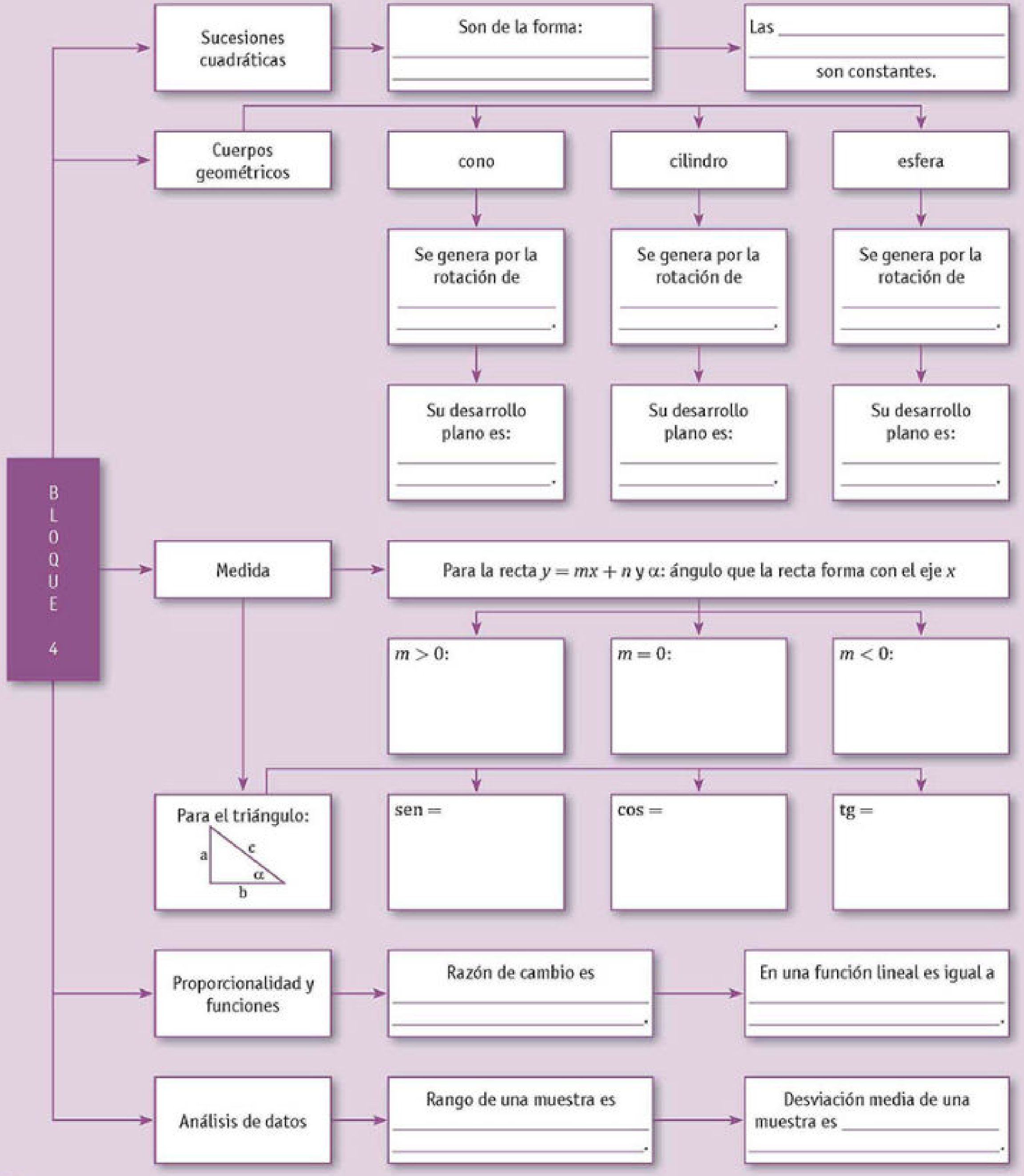
d. ¿Cuál de los cursos tuvo un rendimiento menos uniforme?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar qué es el rango de una muestra.			
Soy capaz de explicar qué es la desviación media de una muestra.			
Soy capaz de establecer conclusiones a partir del rango y la desviación media de una muestra.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios resueltos en esta sección.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un resumen con los conceptos de rango y desviación media.

Síntesis Bloque 4

A continuación se presenta un mapa conceptual que resume las ideas más importantes que se han presentado en este bloque. Debes completarlo con los conceptos más importantes abordados.



Comprueba tus conocimientos Bloque 4

I. Completa cada una de las afirmaciones siguientes según corresponda:

1 El término general de una sucesión es de la forma ______________ si las segundas diferencias entre sus términos son constantes.

2 Al girar un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa, se generan ______________.

3 En un triángulo rectángulo, el seno de uno de sus ángulos agudos se define como

______________.

4 La razón de cambio de dos variables que se relacionan linealmente corresponde a la

____

de la recta que las representa.

5 El estadígrafo que representa el promedio de las distancias de los valores de la variable con respecto a la media de la muestra se llama

______________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Para cada una de las siguientes sucesiones, encuentra el término general y la suma de los términos quinto y sexto:

a. $\frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{9}{10}, \frac{8}{5}, \ldots$

b. 4.5, 18, 40.5, 72,…

2 Una recta forma un ángulo de 135° con el eje de las abscisas y pasa por el punto $(0,4)$. ¿Cuál es la función a la que representa la recta?

3 Si $sen\ \alpha = \frac{2}{7}$, encuentra el valor de $\cos \alpha$ y $tg\ \alpha$.

4 El maestro de Emilio les entregó diferentes cuerpos geométricos y les pidió que dibujen la figura que los generó por rotación sobre un eje y que marquen dicho eje en cada una de ellas. Te mostramos en la figura 4.38 los cuerpos. ¿Puedes tú también responder las interrogantes hechas aquí?

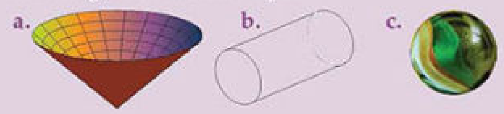


Figura 4.38

5 El banco donde trabaja Joaquín decidió lanzar al mercado un nuevo tipo de crédito de consumo. Los datos recopilados hasta el momento indican que el 1er mes se han captado 100 clientes, el 2° mes, 110, el 3er mes, 120 y se espera que el comportamiento de captación siga el mismo patrón. Joaquín debe responder algunas preguntas que su jefe le ha hecho. ¿Lo puedes ayudar? Te dejamos aquí las preguntas:

a. ¿Cuál es la razón de cambio entre los meses: 2° y 1° y 3° y 2°?

b. ¿Qué función modela la captación de clientes en relación con el tiempo?

c. ¿Cuál es la gráfica de esta función?

6 Amanda debe hacer un trabajo para su clase de Matemáticas. Ella, junto con su grupo, decidió investigar sobre el consumo de cigarrillos en personas adultas. Para ello encuestó a personas de su vecindario y los datos los presentó en la siguiente tabla:

N° de cigarrillos consumidos diariamente	N° de personas
2	20
3	35
4	12
5	27
6	8
7	10

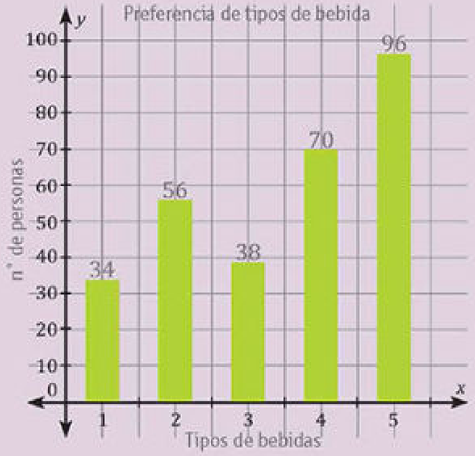
Tal como lo hizo Amanda y sus compañeras, ahora tú determina:

a. El rango de la muestra.

b. La desviación media de la muestra.

c. Al menos 3 conclusiones acerca de la muestra.

1 Dado el siguiente gráfico, que muestra la preferencia por 5 tipos de bebidas gaseosas dentro de una población determinada, responde las preguntas que a continuación se plantean:



a. ¿Qué puedes concluir a partir del cálculo de la media de esta muestra?

b. ¿Es la desviación media una medida segura para determinar el comportamiento de la población?

c. ¿Qué podrías concluir acerca del comportamiento de la muestra en cuanto al consumo de la bebida del tipo 1?

2 El cuerpo de la figura 4.39 se ha generado a partir de una rotación. Responde las siguientes preguntas:

Figura 4.39

a. Dibuja la figura plana a partir de la cual se generó este cuerpo.

b. ¿Cómo podrías construir un cuerpo como este usando una cartulina?

c. ¿Dónde crees y para qué se podrán usar cuerpos como este?

Evaluándonos

Autoevaluación

Realiza esta autoevaluación sobre tu desempeño en este bloque, de manera responsable y honesta, pues esta información te ayudará a remediar y mejorar tu desempeño.

Contenido	Sí lo logré	Me falta mejorar
Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.		
Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.		
Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.		
Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.		
Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.		
Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.		
Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.		

Heteroevaluación

Pídele a un compañero que valore si:

Actitud	Sí lo hice	Me sugieren mejorar
En las actividades grupales participé activamente.		
Me expresé de manera clara y precisa cuando tuve que exponer ante el resto de la clase.		
Mi participación grupal fue de gran valor.		
Escuché atentamente y respeté siempre la opinión de mis pares.		
Incorporé las sugerencias, tanto de mis compañeros como de mi maestro, en mi desempeño individual y grupal.		

Heteroevaluación

Requiere a tu maestro que valore tu desempeño, entregándote estrategias para mejorar en el caso que resulte pertinente.

Al finalizar el bloque, el alumno:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Estudiarás en este bloque:

Tema 1: Patrones y ecuaciones

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Tema 2: Medida

- Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
- Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
- Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

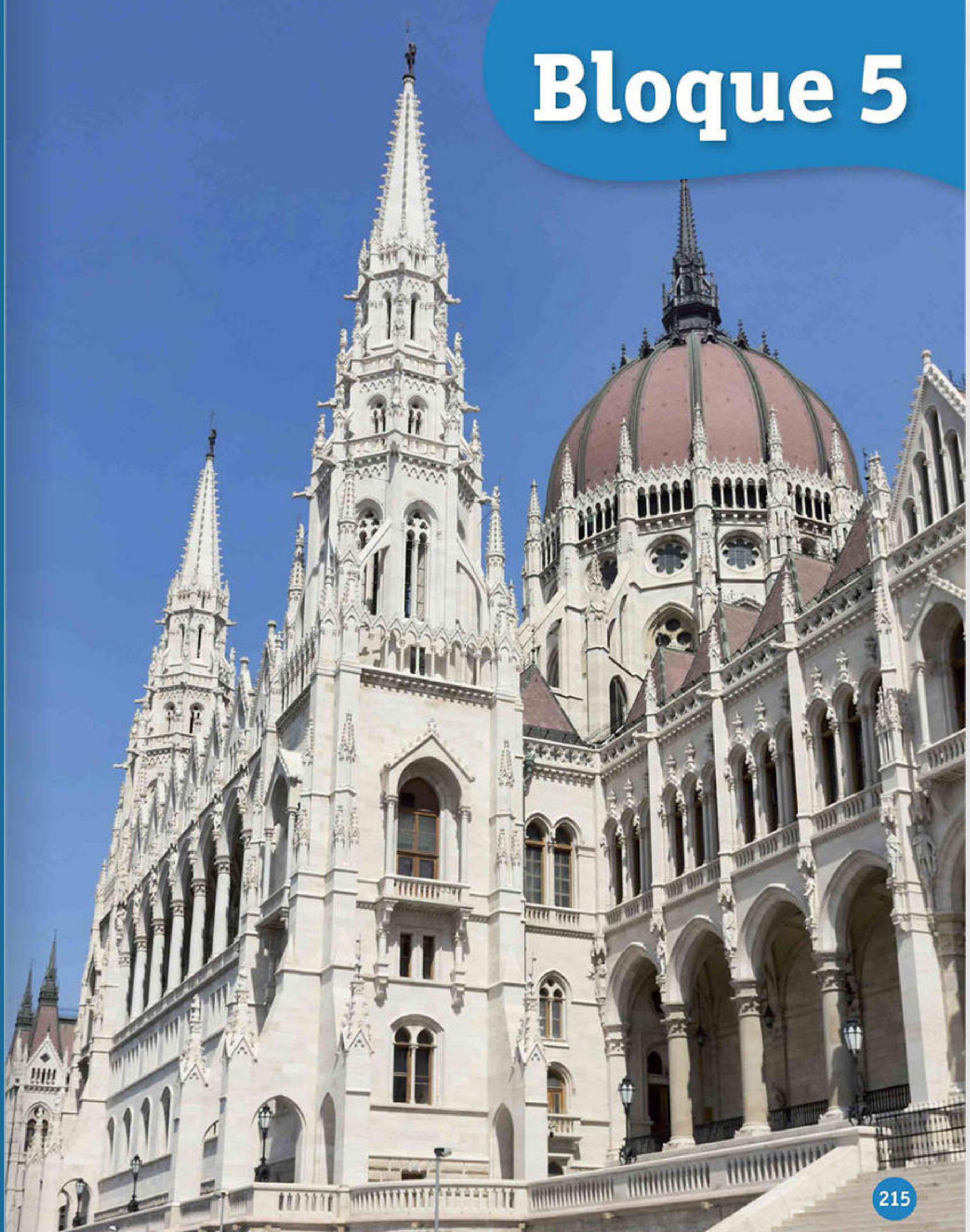
Tema 3: Proporcionalidad y funciones

- Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Tema 4: Nociones de probabilidad

- Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Bloque 5



Patrones y ecuaciones

Estudiarás en este tema

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.
- Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

En grupos de no más de tres integrantes resuelvan la siguiente actividad:
En una fábrica de juegos de mesa, se quiere confeccionar un tablero rectangular. Para tal efecto, se dispone de un cartón cuyas medidas de sus lados se desconocen, pero se sabe que la medida de su contorno es de 174 cm, además, se sabe que la medida de su largo es el doble de la medida de su ancho. En la figura 5.1, se muestra un esquema de lo anterior en el que se ha llamado x al ancho del rectángulo e y a su largo:

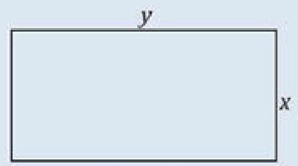


Figura 5.1

Y para comenzar...

1. ¿Se puede resolver este problema a través de un sistema de ecuaciones? Justifica.
2. Verifiquen y determinen las medidas de los lados del tablero y comprueben su respuesta.

Realicen los siguientes ejercicios:

1. Considerando ahora que el cartón disponible tiene forma cuadrada, y que la medida de su área es la misma medida que tenía el rectángulo del ejercicio inicial. ¿Qué tipo de ecuación es la que deben resolver? Justifiquen y determinen la medida del lado del cuadrado.
2. Si se desea innovar y construir un tablero circular de modo que la medida de su diámetro sea igual a la medida del lado del cuadrado recién determinada, ¿es correcto el cálculo que realizaron los diseñadores de 5 049 cm^2 de área? Expliquen.
3. Comprueben si los siguientes procedimientos utilizados para resolver las ecuaciones que se plantean, son correctos o erróneos. De ser erróneo, indiquen donde se encuentra el error y escríbanlo correctamente:

1. $3x - 5(x - 3) = 2x + 6$ *(desarrollamos los paréntesis)*

$3x - 5x - 15 = 2x + 6$

$-2x - 15 = 2x + 6 \qquad / -2x + 15$

$-4x = 21 \qquad /: -4$

$x = -\dfrac{21}{4}$

2. $x(2x - 4) + 3x - 2 = 2x(4x + 1)$ *(desarrollamos los paréntesis)*

$2x^2 - 4x + 3x - 2 = 8x^2 + 2x$

$2x^2 - x - 2 = 8x^2 + 2x \qquad / -8x^2 - 2x$

$-6x^2 - 3x - 2 = 0$

Esta es una ecuación cuadrática, por lo tanto, podemos resolverla usando la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas. Así:

$a = -6, b = -3$ y $c = -2$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot -6 \cdot -2}}{2 \cdot -6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 48}}{-12} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-39}}{-12}$

Como la cantidad subradical de la raíz es negativa, entonces la ecuación no tiene solución.

3. $\left.\begin{array}{l} 3x - 9y = 12 \\ 2x + 5y = 20 \end{array}\right|$

Este es un sistema de ecuaciones lineales. Para resolverlo, multiplicamos cada uno de los miembros de las ecuaciones, de manera que los coeficientes numéricos de una de las incógnitas sean uno el inverso aditivo del otro. Luego sumamos término a término y podremos encontrar el valor de la otra incógnita. Finalmente, remplazamos en cualquiera de las ecuaciones del sistema para encontrar el valor de la incógnita faltante.

$\left.\begin{array}{l} 3x - 9y = 12 \\ 2x + 5y = 20 \end{array}\right| \begin{array}{l} / \cdot 5 \\ / \cdot 9 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 15x - 45y = 60 \\ 18x + 45y = 20 \end{array}\right|$

$33x = 80 \qquad /:33$

$x = \dfrac{80}{33}$

Remplazando en $2x + 5y = 20$:

$2 \cdot \dfrac{80}{33} + 5y = 20$

$\dfrac{160}{33} + 5y = 20 \qquad / -\dfrac{160}{33}$

$5y = \dfrac{500}{33} \qquad /:5$

$y = \dfrac{500}{165} = \dfrac{100}{33}$

Te preguntarás para qué sirve resolver todas estas ecuaciones y sistemas de ecuaciones. A través de este curso ya hemos aplicado algunas de estas ecuaciones en la resolución de problemas. Ahora vamos a profundizar un poco más en este tema y para ello es necesario que diferencies cada tipo de ecuación y conozcas la manera de resolverlas.

Resolución de problemas de planteo

La mamá de Josefina era maestra de Matemáticas y siempre practicaba con ella algunos juegos matemáticos. Esta vez, como Josefina estaba estudiando ecuaciones, quiso jugar con ella a resolver algunos problemas e inventar otros.

Pero antes de resolver problemas, su mamá le explicó que debía aprender a traducir a lenguaje algebraico algunos enunciados. Observa el siguiente cuadro. En él encontrarás algunas formas de traducir enunciados típicos:

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
Un número cualquiera	x o y, en general cualquier letra
Un número par	$2x$
Un número impar	$2x+1$
El sucesor de x	$x+1$
El antecesor de x	$x-1$
Dos pares consecutivos	$2x$ y $(2x+2)$
Dos impares consecutivos	$(2x+1)$ y $(2x+3)$
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$ o $\frac{1}{2}x$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$ o $\frac{1}{3}x$
Un número de dos cifras, donde d es la cifra de las decenas y u la cifra de las unidades	$10d+u$
El producto de x e y	$x \cdot y$
El cociente entre x e y	$\frac{x}{y}$
El exceso de x sobre y	$x-y$
El x% de y	$\frac{x}{100} \cdot y$

Lenguaje algebraico: lenguaje que utiliza letras en combinación con signos y números. En este lenguaje, las letras son tratadas como números en operaciones y propiedades.

Traduzcamos ahora algunos enunciados:

1. El doble del antecesor de y aumentado en 12 unidades:

   $2(y-1)+12$

2. El exceso del triple de un número sobre el cuadrado de dicho número:

   $3x-x^2$

3. El 23% del triple de un número par:

   $\frac{23}{100} \cdot 3 \cdot (2x)$

4. Las manzanas de la cesta de María son igual a un tercio de las naranjas que hay en ella. Entre ambas clases de fruta hay 40 unidades. Si llamamos m al número de manzanas y n al número de naranjas, podemos establecer la relación entre cantidad de manzanas y cantidad de naranjas de la cesta como $m=\frac{1}{3}n$, y luego escribir la ecuación que representa la cantidad de frutas en la cesta en término de una de las variables, en este caso, solo en términos de n. Escríbela y verifícala con tu maestro.

La mamá de Josefina le dijo a su hija que haría una pregunta y que ella la respondiera. Luego, Josefina haría las preguntas y su mamá las respondería. Mira los problemas que resolvieron.

Recuerda y registra...

Las ecuaciones aprendidas hasta ahora sirven para resolver un sinfín de problemas, pero para ello, antes debes traducir el problema a lenguaje algebraico.

1. Si un número impar lo multiplicas por 5 obtendrás 1505. ¿Cuál es el número?

   Recuerda que un número impar se escribe $2x+1$, entonces, podemos traducir el enunciado del problema como:

   $(2x+1) \cdot 5 = 1\,505$
   $10x+5 = 1\,505 \qquad /-5$
   $10x = 1\,500 \qquad /:10$
   $x = 150$

   Por lo tanto, reemplazando en $2x+1 = 2 \cdot 150 + 1 = 301$.
   Así, el número buscado es 301.

   ¿Podemos comprobar que esto está correcto? Pues sí. Multiplicamos por 5 el número 301 y deberíamos obtener 1 505. Veamos:

   $5 \cdot 301 = 1\,505$. Por lo tanto, 301 es el número buscado.

2. Si al cuadrado de cierto número disminuido en 5 se le resta el doble del número se obtendrá 133. ¿Cuál es el número?Llamemos x al número buscado, entonces, podemos traducir el enunciado como:

$(x-5)^2-2x=133$

$x^2-10x+25-2x=133$

$x^2-12x+25=133 \qquad /-133$

$x^2-12x-108=0 \qquad$ Aquí: $a=1, b=-12$ y $c=-108$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot -108}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm\sqrt{144+432}}{2}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{12\pm 24}{2}$$

$$x_1=\frac{12+24}{2}=\frac{36}{2}=18 \text{ o } x_2=\frac{12-24}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

¿Serán ambos números los resultados correctos? Verifiquemos.

Si $x=18$, entonces, este número disminuido en 5 es 13 y su doble será 36. Por lo tanto, si al cuadrado de la primera cifra se le resta el doble del número, se tendrá: $13^2-36=169-36=133$.

Si $x=-6$, entonces, este número disminuido en 5 es -11 y su doble será -12. Por lo tanto, si al cuadrado de la primera cifra se le resta el doble del número se tendrá: $(-11)^2-(-12)=121+12=133$.

Ambos números son solución del problema. Así, los números buscados son 18 y -6.

3. Mario ha querido regalarle a su novia un buen presente de aniversario. Él ha cotizado y para comprar tres pantalones y dos pares de zapatos debe gastar $ 2 975. En cambio, si compra 2 de los mismos pantalones y 3 pares de los mismos zapatos gastará $ 2 715. ¿Cuál es el valor de cada pantalón y cada par de zapatos?

Llamemos x al valor de un pantalón e y al valor de un par de zapatos. Entonces, podemos escribir las ecuaciones siguientes (nota que como tenemos dos incógnitas, entonces necesitamos dos ecuaciones para formar un sistema de ecuaciones):

$$\begin{array}{l|l} 3x+2y=2\,975 & /\cdot -2 \\ 2x+3y=2\,715 & /\cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} -6x-4y=-5\,950 \\ 6x+9y=8\,145 \end{array}$$

(sumando término a término)

$5y=2\,195 \qquad /:5$

$y=439$

Reemplazando en la ecuación $3x+2y=2\,975$, se tiene que:

$3x+2\cdot 439=2\,975$

$3x+878=2\,975 \qquad /-878$

$3x=2\,097 \qquad /:3$

$x=699$

Por lo tanto, cada par de pantalones cuesta $ 699 y cada par de zapatos, $ 439.

4. El terreno rectangular donde Doña Ignacia debe construir su nueva plantación tiene por perímetro 342 m y por área 7 220 m². ¿Cuántos metros de largo tiene el terreno?

Bosquejemos el terreno (figura 5.2):

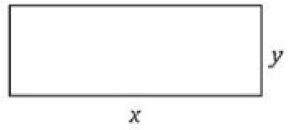


Figura 5.2

Si su perímetro mide 342 m, podemos escribir que $2x+2y=342$ y, por otro lado, si su área mide 7 220 m², podemos escribir que $x\cdot y=7\,220$.

Si de la primera ecuación despejamos una de las incógnitas y la remplazamos en la segunda ecuación, tendremos que:

$2x+2y=342 \quad\Rightarrow\quad 2x=342-2y \quad\Rightarrow\quad x=171-y$

Remplazando en $x\cdot y=7\,220$, tendremos que:

$(171-y)\cdot y=7\,220$

$171y-y^2=7\,220$

$0=y^2-171y+7\,220$. Aquí, $a=1, b=-171, c=7\,220$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{171\pm\sqrt{(-171)^2-4\cdot 1\cdot 7\,220}}{2\cdot 1}=\frac{171\pm\sqrt{29\,241-28\,880}}{2}$$

$$y=\frac{171\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{171\pm 19}{2}$$

$$y_1=\frac{171+19}{2}=\frac{190}{2}=95 \text{ o } y_2=\frac{171-19}{2}=\frac{152}{2}=76$$

Para $y_1=95$ se tiene que $x_1=171-95=76$

Para $y_2=76$ se tiene que $x_2=171-76=95$

De los resultados anteriores, ¿cuál es el resultado correcto? Justifica basándote en la asignación de las variables x e y en la medida de los lados del terreno.

En el siguiente link, encontrarás el planteo de sistemas de ecuaciones a partir de un problema, recuperado, noviembre 13, 2013, de: *http://www.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma3_u2lecc14.pdf*

Habilidades a desarrollar: determinar – calcular.

El cuadrado de un número disminuido en siete equivale a seis veces el exceso del número sobre tres:

a. Indica la ecuación para obtener tal número.

b. Halla el número.

La mamá de Josefina le propuso un nuevo juego a su hija. "Mira –le dijo–, ahora yo te daré una ecuación o un sistema de ecuaciones y tú me dirás qué problema se puede resolver con ellos. Luego tú harás lo mismo". Aquí te dejamos algunos de los problemas que ellas crearon:

1. $2(x+5)=23$

Josefina pensó un poco y dijo a su mamá: "El doble de un número aumentado en cinco unidades es igual a 23. ¿Cuál es el número?".

2. $x(x+5)=150$

La mamá de Josefina dijo: "El largo de un rectángulo es mayor que su ancho en 5 centímetros. Si su área es 150 cm^2, ¿cuál es la medida de su ancho?".

3. $$\left.\begin{array}{l} 26x+32y=3\,624 \\ 18x+41y=3\,847 \end{array}\right|$$

Mmm... pensó Josefina, y luego dijo: "Si 26 niños y 32 adultos van al cine pagarán \$ 3 624 por sus entradas. En cambio, si 18 niños y 41 adultos van al cine a la misma función, pagarán \$ 3 847. ¿Cuál es el valor de una entrada de niño y de una entrada de adulto?".

Y para finalizar...

En parejas analicen y decidan si la ecuación de la letra **a** entrega la respuesta al problema, y si el problema de la letra **b** se resuelve mediante la ecuación dada. Encuentra la solución en ambos casos y luego, en una puesta en común y con ayuda de su maestro, comenten sus respuestas explicando cómo llegaron a ese resultado.

a. $x^2+x-12=0$

El producto entre un número aumentado en una unidad por el mismo número disminuido en dos unidades, es diez. Determina el número.

Sugerencia: en este caso debes determinar la forma inicial de la ecuación y luego desarrollarla hasta llegar a una ecuación de segundo grado

b. Determina los valores de dos partes en que el número 80 se puede separar, tales que dividiendo cada una de ellas por 8, la suma de los cocientes sea igual a 10.

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=10$$

Comprueba tus conocimientos Tema 1

I. Coloca verdadero (V) o falso (F) frente a cada una de las siguientes afirmaciones y justifica cada una de ellas:

1 ___ La ecuación que representa el cuadrado de un número aumentado en veinte es igual a siete es de grado dos.

2 ___ $5x-4=19x+2$ puede representar una condición impuesta a la variable x en un problema donde ella aparezca, o simbolice una cantidad desconocida.

3 ___ El cociente entre a y $b-1$ es equivalente a nueve está expresado por $\frac{a}{b}-1=9$.

4 ___ Sean m y n dos números naturales. El doble del primero es igual al segundo aumentado en quince; y si además el primero disminuido en dieciséis corresponde a la mitad del segundo, entonces la representación de cada relación conforma un sistema de ecuaciones de primer grado.

5 ___ El 20% de k es ciento veintiuno se escribe $20 \cdot 100 \cdot k=121$

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Al multiplicar un número par por once y luego restarle su sucesor, se obtiene 239.

a. Plantea la ecuación que permite obtener dicho número par.

b. ¿Cuál es el número?

2 El doble de un número disminuido en cinco veces otro número resulta diez. Pero si se multiplica el primer número por cuatro y el segundo por tres, para luego sumarlos, se obtiene siete:

a. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que conduce a la obtención de los números aludidos?

b. Encuentra ambos números.

3 Si el perímetro de un romboide es igual a 22 cm, y sus lados miden $x+9$ y $2x-13$, entonces:

a. Establece la ecuación presenta la información dada previamente.

b. Encuentra el valor de cada lado.

4 Las medidas de los lados de un rectángulo están simbolizadas por $y+12$ mm y $2y-7$ mm. Si su área es 376 mm^2:

a. Obtén el valor de cada lado.

b. Escribe una ecuación que permita obtener el perímetro de este rectángulo.

5 La base de un triángulo b, y la altura perpendicular a ella h, presentan las siguientes relaciones: en primer lugar, la base corresponde a duplicar la altura y aumentarle 5 dm. En segundo lugar, la base y la altura totalizan 41 dm:

a. Anota el sistema de ecuaciones con que se logra obtener b y h.

b. Encuentra el área respectiva.

6 Las aristas de un paralelepípedo son $2z+1$, $4z-9$ y $3z-11$. Si la suma de ellas es 89 m:

a. Determina la ecuación para conseguir z.

b. ¿Es verdad que un par de las caras son cuadradas? ¿Por qué?

c. Inventa alguna pregunta usando los datos de este ejercicio, dando su respuesta, correspondiente.

7 El término general de una sucesión se obtiene cuadruplicando el cuadrado de un númeron y sumándole ocho, para luego disminuirlo en el producto entre 5 y n. También se sabe que uno de los términos es 619. ¿A qué valor de n se refiere la ecuación anterior?

8 Analiza las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones y redacta un problema que se pueda resolver con cada uno. Posteriormente, contesta la(s) pregunta(s) que has formulado.

a. $-11x + 16 = 7$

b. $y^2 = 76 + y$

c. $\begin{cases} a + b = 32 \\ b - a = 8 \end{cases}$

d. $x(x + 5) = 66$

e. $\begin{cases} 13x + 45 = y \\ 2x - y = 250 \end{cases}$

f. $\frac{4}{5}n + \frac{8}{9}n = 76$

g. $(m - 17)(m + 16) = 234$

9 Resuelve los siguientes problemas utilizando un sistema de ecuaciones.

a. Las edades de Claudia y Ana suman 20 años y la edad de Claudia es $\frac{2}{3}$ de la edad de Ana, ¿qué edad tiene cada una?

b. En una librería el precio de un lápiz es $8 más caro que el de un sacapuntas. Si se compran 3 sacapuntas y 2 lápices el valor es de $76. ¿Qué precio tiene cada artículo?

c. En una caja hay 9 bolitas entre verdes y rojas. Si se sacan dos verdes y tres rojas queda lo misma cantidad de bolitas de cada color. ¿Cuántas bolitas verdes había en un principio?

d. Alberto tiene los $\frac{3}{5}$ de lo que tiene Gloria y entre ambos tienen $ 4 000. ¿Cuánto tiene Gloria?

e. El año pasado las edades de Sergio y Tomás sumaban 26 años. Si Sergio tiene 2 años más que Tomás, ¿qué edad tiene el mayor?

f. Un vendedor compra sacos de galletas y chocolates. Dispone de 19 000 para comprarlos y de 6.9 m^3 para almacenarlos. Cada saco de galletas o chocolates le cuesta 100 pesos. Los sacos de galletas ocupan un espacio de 10 dm^3 y los de chocolates ocupan, cada uno, 60 dm^3. ¿Cuántos sacos de cada tipo debe comprar el tendero si quiere utilizar todo el espacio del que dispone para almacenarlos y quiere gastar en ellos todo el dinero que tiene.

10 El perímetro de un rectángulo mide 56 cm y si el largo disminuye en 2 cm y el ancho aumenta en 2 cm, resulta un cuadrado. ¿Cuánto mide el largo? Para resolver el problema anterior Juan plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x - 2 = y + 2 \end{cases}$$

Según este sistema, ¿qué representaría la incógnita x?

11 Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación cuadrática.

a. Al dividir 941 por un cierto número resulta este mismo número. ¿Cuál es el número?

b. La medida de superficie de un cuadrado de lado a es 289 cm^2. ¿Cuánto vale a?

c. ¿Cuál es el número natural que elevado al cuadrado da 676?

d. Aumentar en 27 el séxtuplo de un número es lo mismo que sumar su cuadrado cinco veces. ¿Cuál es ese número?

e. Determina el valor de x en la figura 5.3.

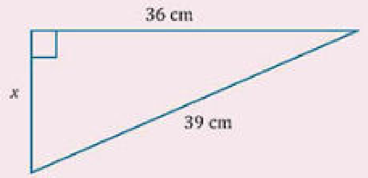


Figura 5.3

f. Con los datos de la figura 5.4 calcula la medida de los lados del rectángulo si se sabe que su área es igual a 8 cm^2.

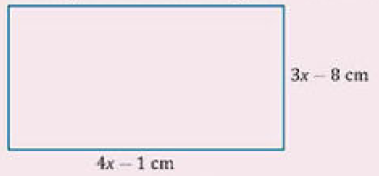


Figura 5.4

12 Tío Rogelio empieza a narrarme viejas historias de su tatarabuelo – Él estaba luchando contra los invasores a nuestras tierras, y en un ataque sorpresa del enemigo, cayeron la mitad de los soldados que componían la patrulla en la que participaba, no recuerdo cuántos la formaban, y según él, la sexta parte murió y la octava parte quedó herida. Mi tatarabuelo junto a los otros veinticuatro compañeros que se salvaron, tuvieron que cargarlos muchos kilómetros, hasta llegar a uno de nuestros puestos militares más cercano.

Conforme al párrafo anterior:

a. Indica algebraicamente una manera de conocer el número de soldados de esa patrulla.

b. ¿Por qué es posible conocer la cantidad de soldados que murieron?

c. ¿Se puede saber la cantidad de soldados que permanecieron libres, después del ataque?

d. ¿Cuántos soldados fueron hechos prisioneros?

e. Supongamos que en el relato, Tío Rogelio se haya equivocado y que en lugar de que – la sexta parte murió y la octava parte quedó herida–, haya sido exactamente al revés, ¿habrá cambiado el número de soldados de aquella patrulla? Justifica tu respuesta haciendo los cálculos correspondientes.

13 Tuco y Tico, los hijos gemelos de la señora Tertulia, tienen una conversación: –Tico, mira, tienes el doble de canicas que yo. –Tienes razón, pero observa: si yo te entrego doce, quedamos iguales.

a. Escribe la ecuación que representa la situación.

b. ¿Cuántas canicas tiene cada uno?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar para qué se utiliza la traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Desarrollé correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un cuadro resumen que incluya las distintas situaciones en que se pueden aplicar ecuaciones.

Medida

Estudiarás en este tema

- Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
- Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
- Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

En grupos de cuatro integrantes, realicen la siguiente actividad:
En la figura 5.5 se muestra el esquema de un sombrero de cumpleaños:

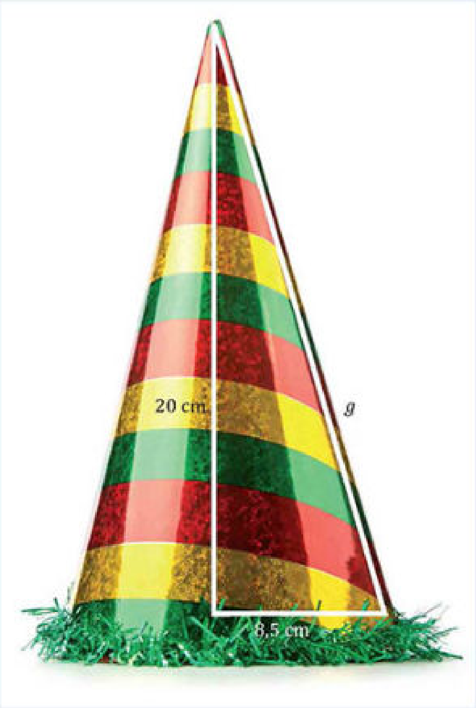


Figura 5.5

Y para comenzar...

¿A qué cuerpo se asemeja este sombrero de cumpleaños?

¿Cuál es la medida de la generatriz de este cuerpo?

¿Qué teorema importante te ayudó a encontrar esta medida?

Discute con dos compañeros cómo determinarían la medida de la generatriz de un sombrero semejante a un cilindro, cuya medida de su ancho es igual a la medida del radio anterior, y la medida de su perímetro es igual a la del desarrollo plano del sombrero anterior.

Para comprender los contenidos de este nuevo tema es necesario que domines los cálculos realizados mediante el teorema de Pitágoras y los elementos que constituyen a los conos y cilindros.

Secciones de conos y cilindros

Construyamos un cono y un cilindro de plastilina y luego, con un cuchillo, cortemos el cono y el cilindro por planos paralelos a sus bases, por planos oblicuos y por planos perpendiculares a las bases. Mira los cortes y dibuja qué figuras planas ves. ¿Hay figuras que ya conocías?, ¿hay figuras que no habías visto?, ¿sabes cómo se llaman todas las figuras que puedes ver?

En efecto, al seccionar un cono y un cilindro podemos visualizar muchas figuras, mostradas en la figura 5.6, que ya conocemos, y otras nuevas. Analicemos primero el cilindro:

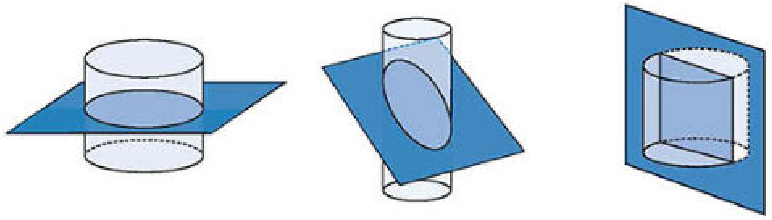


Figura 5.6

Si te fijas bien, cuando cortamos el cilindro por un plano paralelo a la base obtenemos siempre **círculos** congruentes a las bases del cilindro. Si lo cortamos en forma perpendicular a las bases, se forman **rectángulos**.

Y si le hacemos un corte oblicuo, nos da una **elipse**.

Analicemos el cono y sus cortes en la figura 5.7.

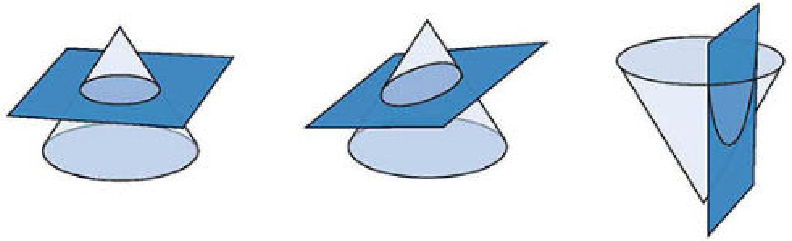


Figura 5.7

Al cortarlo por un plano paralelo a la base se obtienen círculos de distinto radio. Todos ellos son semejantes.

Si miras la segunda imagen donde el plano que corta al cono es oblicuo, pero no se interseca con su base, se genera una elipse. Si el plano que lo corta es oblicuo, pero corta a la base, como en la última figura, se obtiene una parábola (aquellas que modelan las variaciones cuadráticas).

Sabías que...

Los planetas del sistema solar giran en torno a otros astros de este mismo sistema describiendo órbitas elípticas. Este hecho fue descubierto en el siglo XVI por el astrónomo alemán Johannes Kepler.

Se muestran estos cortes en la figura 5.8:

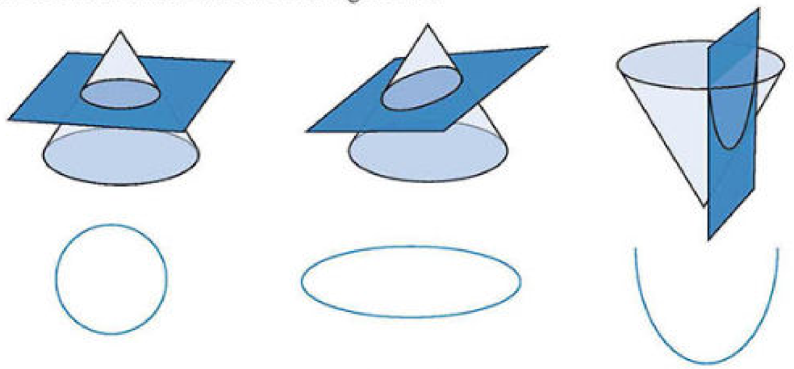


Figura 5.8

Biografía

Apolonio de Perga nació alrededor del 262 a.n.e. en Perga, Grecia Ionia (ahora Turquía), y falleció alrededor del 190 a.n.e. en Alejandría, Egipto. Se conoce como "El gran geómetra". En su libro *Secciones cónicas* introdujo los términos parábola, elipse e hipérbola.

Ahora construye con plastilina dos conos de igual tamaño y únelos por sus cúspides, luego corta esta figura por un plano perpendicular a sus bases. ¿Qué figura se ve al mirar el corte? Observa la figura 5.9.

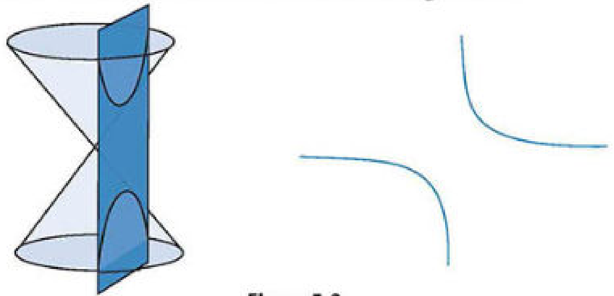


Figura 5.9

Como lo ves, se forman dos curvas que llevan el nombre de **hipérbola**. Una hipérbola es una curva que tiene dos ramas.

Todas estas figuras eran las que los griegos denominaron **cónicas**, pues se generan a partir de los cortes de un cono. Cada una de ellas tiene una representación algebraica que las modela (como ya lo has visto para la parábola).

Detengámonos un poco más en el cono y sus cortes por planos paralelos (figura 5.10).

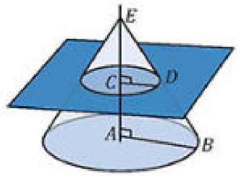


Figura 5.10

Si te fijas, los triángulos rectángulos *ABE* y *CDE* tienen sus ángulos interiores iguales: los ángulos en *A* y en *C* por ser rectos, los ángulos en *B* y en *D* por ser ángulos entre paralelas y el ángulo en *E* que es común a ambos triángulos. ¿Qué clase de triángulos son entonces?

Tal como lo has dicho, ambos triángulos son semejantes y, por lo tanto, sus lados son proporcionales. En especial, los radios de los círculos formados.

Se cumple, entonces, el teorema de Tales. ¿Lo recuerdas?, ¿qué proporciones podemos plantear?

En efecto, podemos decir que: $\frac{\overline{EC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{BA}}$.

Escribe tú las otras proporciones y verifícalas con tu maestro.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La altura de un cono es 12 cm y se ha cortado por un plano paralelo a la base a 3 cm de esta. Si el radio basal del nuevo cono es 6 cm, ¿cuánto medía el radio basal del cono original?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Dibujemos la figura 5.11 con los datos dados.

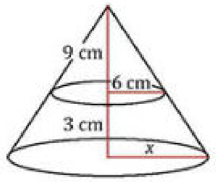


Figura 5.11

Podemos, entonces, formar la siguiente proporción:

$\frac{9}{6}=\frac{12}{x} \Rightarrow x=\frac{6 \cdot 12}{9}=\frac{72}{9}=8$

Por lo tanto, el radio basal del cono original mide 8 cm.

2. Si se sabe que la generatriz de un cono mide 13 cm y el radio basal, 5 cm y se hace un corte paralelo al cono de modo que la nueva generatriz mida 7 cm, ¿cuál es la medida del nuevo radio basal?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Dibujemos la figura 5.12 con los datos dados.

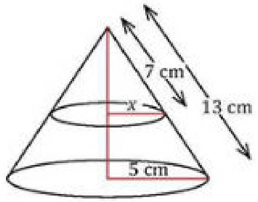


Figura 5.12

Formando la proporción:

$\frac{13}{5}=\frac{7}{x} \Rightarrow x=\frac{5 \cdot 7}{13} \approx 2.7$

Por lo tanto, el nuevo radio basal del cono mide aproximadamente 2.7 cm.

Habilidades a desarrollar: determinar – calcular.

Se ha obtenido un cono de altura 10 cm y de radio 8 cm, a partir de otro cuya altura es 5 cm más grande que el anterior, haciendo un corte paralelo a la base de uno de ellos:

a. Escribe alguna ecuación (proporción) que permita calcular el radio basal del cono original.

b. ¿Cuánto mide dicho radio?

Volumen de conos y cilindros

Margarita quería construir un prisma que tuviera por base un polígono regular de 10 lados. Para hacer la base dibujó un círculo y marcó en la circunferencia 10 arcos de 36° cada uno (recuerda que una circunferencia abarca un ángulo de 360°). Por último, unió los puntos de la circunferencia (figura 5.13).

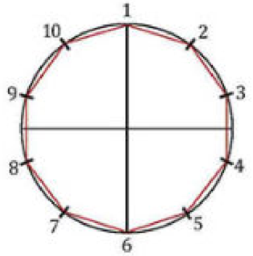


Figura 5.13

- ¿Y si lo quiere de 12 lados? (figura 5.14).

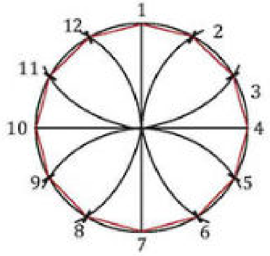


Figura 5.14

Margarita se dio cuenta de que los lados de este polígono se acercaban a la línea trazada por la circunferencia. Luego, armó los rectángulos que serían los lados del prisma y construyó lo que quería.

Pensemos ahora. Si quieres construir un polígono regular de 20 lados, ¿cómo lo harías?, ¿quedan los lados del polígono cerca de la línea trazada de la circunferencia? ¿Se puede decir que el área del polígono estará cercana al área del círculo? ¿Y si construimos un polígono regular de 10 000 lados?

En efecto, podemos intuir que al aumentar el número de lados del polígono, sus lados se acercarán cada vez más a la circunferencia, y su área será cada vez más parecida a la del círculo que lo contiene. En matemáticas se puede demostrar, usando matemáticas más avanzadas, que la sucesión formada por el área de estos polígonos tiende al área del círculo que los contiene (son iguales cuando el polígono tiene infinitos lados).

Si miramos esto como lo que le sucede a la base de un prisma, podemos intuir también que mientras más lados tenga el polígono basal, el prisma se irá pareciendo cada vez más a un cilindro.

Si es así, podemos inferir también que si el volumen de un prisma se puede calcular como el producto del área de la base por su altura, el volumen de un cilindro (figura 5.15) será también el producto del área basal por su altura.

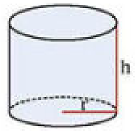


Figura 5.15

Así, el volumen de un cilindro está dado por la fórmula: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Para un cono podemos hacer el mismo análisis a partir de una pirámide.

Si aumentamos cada vez más los lados del polígono que forma la base de la pirámide, sus lados se acercarán cada vez más a la circunferencia y su área será cada vez más parecida a la del círculo que lo contiene, como en la figura 5.16.

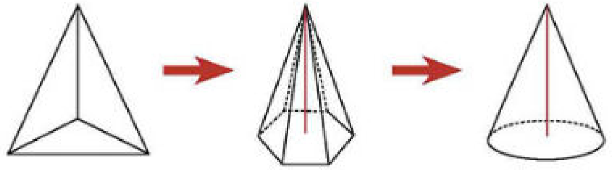


Figura 5.16

Así, el volumen de un cono (figura 5.17) está dado por la fórmula:

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$.

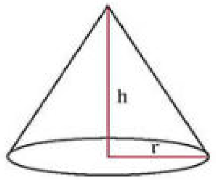


Figura 5.17

Más que...

Si construyes un cilindro y un cono que tengan el mismo radio basal y la misma altura y mides arena con el cono, podrás demostrar que 3 veces el volumen del cono completan el volumen del cilindro.

¿Qué relación existirá entre el volumen de un cono y el volumen de un cilindro? Enúnciala y verifícala con tu maestro.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un estanque cónico de altura igual a 15 m tiene capacidad para 1600 metros cúbicos. ¿Cuál es la medida aproximada de su radio basal?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Utilizamos la fórmula para calcular el volumen de un cono: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, ¿cuál es la capacidad de este estanque?

Conociendo el valor anterior, utilizando $\pi = 3.14$ y sabiendo que la altura del estanque es igual a $h = 15$ m, podemos utilizar la fórmula para determinar el volumen, pero en este caso, calculando el radio del estanque. Es decir: $1\,600 = \frac{3.14 \cdot r^2 \cdot 15}{3}$.

Así, debemos despejar la variable r para determinar la medida aproximada de su radio basal.

Determínalo y verifícalo con tu maestro.

2. En la fábrica de artículos de vidrio donde trabaja Manuel están diseñando distintos tipos de floreros. Uno de ellos, de diámetro 9 cm, tiene forma cilíndrica. Si Manuel sabe que debe contener un litro y medio de agua, ¿cuál deberá ser su altura?

SOLUCIÓN

Procedimiento: Nuevamente utilizamos la fórmula para calcular el volumen de un cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sabemos que el florero debe contener un litro y medio de agua, es decir, 1.5 L = 1 500 cm³ y también conocemos el diámetro del florero: 9 cm, que equivale al doble del radio basal. Así, despejando h de la fórmula de volumen, calculamos la altura del florero. Determínala y verifícala con tu maestro.

Y para finalizar...

Observa la figura 5.18 que muestra un corte paralelo al radio basal de un cono recto, en la mitad de su altura.

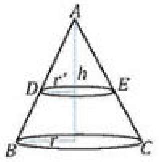


Figura 5.18

En parejas determinen una fórmula en términos de h y r, que les permita calcular el volumen del cono determinado por los puntos ADE. Consideren $r' = \frac{r}{2}$. Compara tu resultado con algunos compañeros de tu clase, y verifíquenlo con su maestro.

Comprueba tus conocimientos Tema 2

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda.

1 Una manera de obtener círculos congruentes usando un cilindro es ______________________

2 Una forma de conseguir círculos en un cono es la siguiente ______________________

3 Al cortar un cono de manera oblicua mediante un plano y sin tocar su base, se obtiene una ______________. En cambio, si corta la base, se consigue una ______________________

4 Se llaman______________ a las que se generan a partir de los cortes de un cono.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 ¿Cuál es el volumen de un cono si el diámetro de su base es 10 cm y la altura es 13 cm?

2 Si un cilindro tiene una altura de 20 cm y su radio es un quinto de esa altura, ¿cuál es el volumen del cilindro?

3 ¿Cuál es el volumen de la figura 5.19, en la que se indica su altura y el perímetro de cada cara basal es 16 cm? (Considera $\pi = 3$)

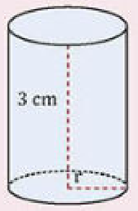


Figura 5.19

4 ¿Cuál es el volumen del cono que se indica en la figura 5.20?

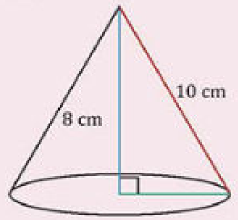


Figura 5.20

5 Un refresco se almacena en un envase cilíndrico que tiene una capacidad de 0.3 litros. Se reparte en conos invertidos, de igual altura y radio que el envase donde se almacena. ¿Cuántos conos de refresco se pueden llenar? Justifica tu respuesta.

6 El frasco cilíndrico de la figura 5.21 tiene un volumen de 90 cm³, ¿cuánto mide su altura? (Considera $\pi = 3$)

Figura 5.21

7 Se ha obtenido un cono de altura 10 cm y de radio 8 cm, a partir de otro cuya altura es 5 cm más grande que el anterior, haciendo un corte paralelo a la base de uno de ellos:

a. Escribe alguna ecuación (proporción) que permita calcular el radio basal del cono original

b. ¿Cuánto mide dicho radio?

c. Escribe una ecuación (proporción) que permita conocer la generatriz del cono nuevo

d. Halla la medida de ambas generatrices.

e. Formula alguna pregunta con la información lograda hasta este momento. Incluye la respuesta.

8 El cilindro recto que se muestra a continuación en la figura 5.22 tiene un volumen de 1 177.5 cm³, con un radio basal de 5 cm:

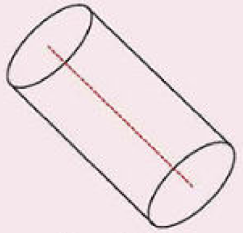


Figura 5.22

a. Encuentra las medidas del rectángulo que permiten generar este cilindro, eligiendo el segmento rojo como el eje de giro.

b. ¿Cuánto valen las áreas basales de los cilindros resultantes?

9 En el siguiente cono, h y h' son las alturas de los conos mayor y menor, respectivamente. De manera análoga, r y r' son los correspondientes radios. Además, las superficies basales son paralelas, como se aprecia en la figura 5.23:

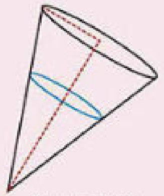


Figura 5.23

a. Considerando $h + h' = 13.5$ cm y $r{:}r' = 7{:}2$, ¿cuál es el valor de cada

i. altura?

ii. generatriz?

b. Si $h' = 19$ mm, $h = 20.9$ mm, $r' = 5.7$ mm, halla el valor de:

i. r

ii. El volumen del cono menor.

iii. La superficie basal del cono mayor.

c. Tomando en cuenta que $h = 6$ m, $h' = 0.75\,h$ y el perímetro basal mayor es 12.56 m:

i. ¿Cuánto es la diferencia entre los respectivos radios?

ii. ¿En cuántas unidades aproximadamente supera la generatriz mayor a la menor?

iii. ¿Es el volumen de cilindro mayor a 25 m^3? ¿Por qué?

iv. Genera alguna pregunta, usando los datos iniciales de este ejercicio, y da la respuesta respectiva.

10 En el cono de la figura 5.24 la razón entre el radio menor y el mayor es 2:5.

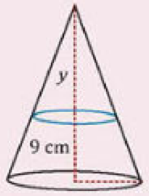


Figura 5.24

a. Indica alguna ecuación que permita obtener el valor de y.

b. ¿Cuánto mide cada altura?

Ahora bien, si el volumen del cono mayor es 489.84 cm^3:

c. Averigua la medida del radio de este cono.

d. ¿Cuál es la medida de la superficie basal del cono menor?

e. ¿Cuánto vale el exceso de volumen del cono mayor con respecto al menor?

11 La altura de un cono es $3x + 5$ y se corta por un plano paralelo a la base, generando un nuevo cono de altura $2x - 5$ y de radio basal $x - 7$. Si el radio basal del cono original es $x + 11$ y todas las medidas están dadas en dm:

a. Anota alguna ecuación (proporción) que permita calcular x.

b. Escribe las ecuaciones que permitan obtener el valor de cada generatriz.

c. Determina todas las medidas mencionadas en el enunciado.

d. ¿Cuáles son los valores de cada generatriz?

Determina el volumen del cono menor.

e. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se forma al separar el cono nuevo del original?

12 La razón entre las alturas de dos conos es 5 : 4 y la de sus radios es la misma. ¿Es posible hallar la razón entre las generatrices sin tener sus valores? Justifica tu respuesta.

13 ¿Cuánto mide el volumen de la figura 5.25 si el radio basal del cilindro mide 4 cm y la medida de la altura del cono es igual a la medida de la altura del cilindro y esta corresponde al doble de la medida de su radio basal?

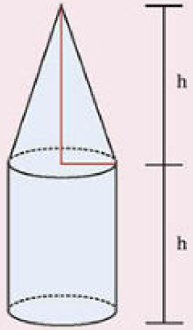


Figura 5.25

14 "Tío Antonio, ¿estás seguro de que quieres colocar una cisterna cilíndrica de diámetro de 1.60 m y una capacidad de 2 800 litros?, porque dudo que con las medidas que tú me indicas los trabajadores lo hagan a la perfección. Recuerda que el depósito se colocará sobre una base de concreto de 10 cm de espesor". Pero el tío Antonio no hizo caso de esta última medida.

a. Escribe una ecuación que permita dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuánto se tiene que excavar para que el depósito quede al nivel del suelo?

b. Responde esta pregunta omitiendo el espesor.

c. Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero con el espesor indicado.

15 Caminé completamente perdido hasta el anochecer en medio de ese campo lleno de silos, me recosté cansado, apoyando mi espalda en uno de ellos y pensé: ¡cuántas veces construí esas formas cónicas de cien a ciento veinte metros cúbicos para almacenar forrajes, granos o semillas!, ahora el patrón nos ordenó construir los silos con diámetro de ocho metros.

a. Escribe la fórmula para encontrar la altura de un silo en función de su volumen.

b. ¿Cuál deberá ser la altura del silo, considerando que el diámetro medirá 8 metros y su volumen será de ciento veinte metros cúbicos?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de describir las figuras que se generan a partir de los cortes que se pueden hace a un cono y un cilindro.			
Soy capaz de explicar cómo se calculan los volúmenes de conos y cilindros.			
Entendí los ejercicios resueltos.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un esquema que incluya el nombre del cuerpo geométrico y la fórmula utilizada para calcular su volumen con la descripción de cada término presente en esta.

Proporcionalidad y funciones

Estudiarás en este tema

- Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Lee la siguiente introducción y luego contesta:
La altura de cierto cohete se describe por la siguiente función: $h(t) = -4.9t^2 + 49t + 2.5$, en la que t representa el tiempo en segundos después del despegue.

Y para comenzar...

1. ¿Qué nombre reciben este tipo de funciones?
2. ¿En qué tiempos el cohete está a 27 m por encima del nivel del suelo?
3. ¿Cuál es la forma de la curva que describe esta ecuación? De acuerdo a esto, ¿por qué obtienes dos tiempos distintos para una misma altura en la respuesta a la pregunta anterior? Explica.

En parejas, resuelvan los siguientes problemas:

1. En una escuela la matrícula de estudiantes aumenta en 60 cada año. La escuela se inició con 385 estudiantes matriculados. Modelen una función que describa la relación entre el número de años transcurridos (x) desde el inicio de la escuela y la cantidad de estudiantes matriculados (y).
2. ¿Cuál de las siguientes situaciones puede ser solucionada con una ecuación cuadrática? (Grafica cada una y determina el tipo de variación)

   a. Cantidad de productos vendidos en un año según su precio de venta.

Precio de venta ($)	Cantidad vendida en un año
7	500
14	400
21	300

   b. La relación entre el área del rectángulo que resulta al aumentar dos lados paralelos de un cuadrado en 3 unidades, en función de la medida del lado x del cuadrado (figura 5.26).

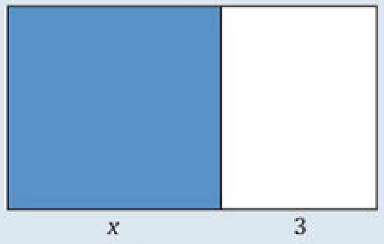


Figura 5.26

Es necesario que comprendas muy bien las relaciones antes mencionadas entre dos conjuntos de cantidades para abordar los contenidos de este tema.

Aplicación de las variaciones lineales y cuadráticas

Josefina le preguntó a su mamá si podía ayudarla con el tema de las variaciones lineales y cuadráticas de la misma manera que lo había hecho con las ecuaciones.

Su mamá le dijo que sí y le mostró varios problemas que se pueden resolver a través del uso de estas variaciones y que además están relacionados con otras disciplinas. Estos fueron algunos de los casos que estudiaron Josefina y su mamá:

1. Pedro trabaja en una consulta médica atendiendo a mujeres embarazadas. Él les recomienda que, en promedio, suban hasta un kilo por mes, para no tener dificultades durante el embarazo. María, sin embargo, no ha logrado este aumento de peso constante y reducido. Observa la siguiente tabla con los pesos por mes desde que quedó embarazada. De seguir así, ¿cuántos kilos habrá subido cuando tenga a su bebé a las 40 semanas?

Nº de semanas de gestación	Peso aumentado
0	0
5	1
10	3
12	4.08
13	4.7

Grafiquemos estos datos en la figura 5.27:

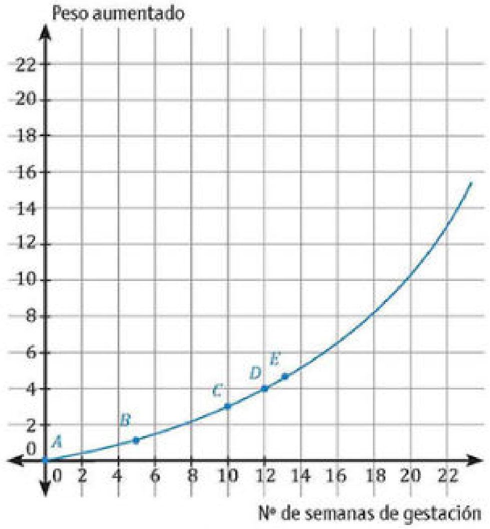


Figura 5.27

Si te fijas bien, el aumento de peso de María se comporta como una variación cuadrática con respecto a las semanas de embarazo. Para hacer una proyección exacta del aumento de peso a la semana 40 de gestación, debemos determinar la expresión algebraica o función que modela este problema.

El parámetro c de la función $y = ax^2 + bx + c$ que modela este problema está dado por la coordenada y del punto donde la parábola corta al eje y. En este caso, como la parábola pasa por el origen del sistema cartesiano, tendremos que $c = 0$. Por otro lado, remplazando los valores de c y los puntos $(5, 1)$ y $(10, 3)$, en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, podremos plantear el siguiente sistema de ecuaciones para calcular los parámetros a y b:

$$\begin{array}{l|} 1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 0 \\ 3 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 25a + 5b = 1 & / \cdot -2 \\ 100a + 10b = 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} -50a - 10b = -2 \\ 100a + 10b = 3 \end{array} \qquad \textit{(sumando)}$$

$$50a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{50}$$

Remplazando este valor en la primera ecuación del sistema, tendremos que:

$$25 \cdot \frac{1}{50} + 5b = 1$$

$$\frac{1}{2} + 5b = 1 \quad \Rightarrow \quad 5b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{10}$$

Por lo tanto, la variación cuadrática que modela el aumento de peso de María (p), en función de las semanas de gestación (s), será:

$$p = \frac{1}{50}s^2 + \frac{1}{10}s$$

Para calcular el aumento de peso de María a las 40 semanas, debemos considerar que $s = 40$ y sustituir este valor en la ecuación recién determinada: $p = \frac{1}{50}s^2 + \frac{1}{10}s$

- ¿Cuánto peso aumentó María durante su embarazo?
- ¿Crees que este aumento es adecuado? ¿Por qué?

2. Jesús quiere instalar una empresa que produzca y venda calzados hechos a mano. Su hijo mayor, que va a la universidad, le ha explicado lo siguiente: "Según lo que he estudiado, nuestros costos irán disminuyendo a medida que produzcamos más pares de zapatos. He calculado que el costo de un par es \$ 900, el de dos pares \$ 800 y disminuye así linealmente. Las ganancias que obtendremos irán aumentando también linealmente, de manera que por un par ganaremos \$ 200, por dos pares \$ 400 y así sucesivamente". Jesús desea saber cuántos pares de zapatos debe vender para que sus costos sean igual que sus ganancias.

Como ambas funciones son lineales, entonces son de la forma $y = ax + b$. Determinémoslas.

Para los costos, si llamamos c al costo por fabricar n pares de zapatos, la función será de la forma $c = an + b$. Remplazando los valores dados por el hijo de Jesús, tendremos que: $900 = a + b$ y $800 = 2a + b$

Formando un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l|} a + b = 900 \\ 2a + b = 800 \end{array} \qquad \textit{(restando ambas ecuaciones término a término)}$$

$$-a = 100 \quad \Rightarrow \quad a = -100$$

Remplazando en la primera ecuación del sistema:

$$-100 + b = 900 \quad \Rightarrow \quad b = 1\,000$$

Por lo tanto, la función que modela los costos, en función de los pares de zapatos que se fabrican, es: $c = -100n + 1\,000$

Por otro lado, para las ganancias, tendremos que si llamamos g a las ganancias por par de zapatos vendidos y n al número de pares de zapatos vendidos, la función será de la forma $g = cn + d$. Entonces, con los datos entregados, también podremos formar un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l|} 200 = c + d \\ 400 = 2c + d \end{array} \qquad \textit{(restando ambas ecuaciones término a término)}$$

$$-200 = -c \quad \Rightarrow \quad c = 200$$

Por lo tanto, si remplazamos en la primera ecuación del sistema, obtendremos que:

$$200 = 200 + d \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

Así, la función buscada será: $g = 200n$.

Ahora pensemos en la pregunta de Don Jesús. Él quiere que sus costos sean iguales a sus ganancias. Debemos, entonces, igualar ambas funciones para determinar el número de zapatos que debe fabricar (n).

Realiza este cálculo y determina el número de pares de zapatos que Don Jesús debe producir y vender para estar seguro de que no perderán dinero.

3. Manuel, el que trabajaba en la fábrica de artículos de vidrio, ahora tiene un nuevo problema. Su jefe le ha encargado fabricar varios floreros con forma cilíndrica de la misma altura, 14 cm (figura 5.28). Le ha pedido además que determine la variación que se produce entre el volumen de los cilindros y los radios de estos. Y por último, que determine la variación de los volúmenes que se origina al duplicar los radios.

Figura 5.28

Como sabemos, el volumen de un cilindro está dado por la fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Como π y h son constantes, entonces el volumen de estos cilindros estará dado por:

$V = 3.14 \cdot r^2 \cdot 14 \quad \Rightarrow \quad V = 43.96 \cdot r^2$

¿A qué tipo de variación corresponde la relación entre el volumen del cilindro y su radio basal?

Si queremos saber cuál es la variación de volumen que se produce al duplicar el radio de un cilindro, bastará con decir que si el radio inicial es r y el nuevo radio, por consiguiente, $2r$, se puede anotar lo siguiente (recuerda que la altura se mantiene constante):

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h$ y $V_2 = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 4 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot h) = 4 \cdot V_1$

Es decir, el volumen del primer cilindro será la cuarta parte del volumen del segundo.

4. Arturo trabaja para una consultora muy prestigiosa. Él debe entregar un informe para una compañía de artículos médicos. Arturo sabe que las utilidades de la empresa se comportan según una función cuadrática y sabe además que por la producción de 1 000 artículos la utilidad es de US$ 5 000, y de US$ 6 000 si producen 2 000 artículos. Por supuesto, si no se producen artículos, las utilidades serán nulas.

a. ¿Cuál es la función que regula las utilidades según los artículos producidos?

Si llamamos u a las utilidades y p al número de artículos producidos, la función debe ser de la forma $u = ap^2 + bp + c$. Entonces, remplazando los

valores de p para 0, 1 000 y 2 000 artículos, tendremos que:

$$\begin{array}{|l} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 5\,000 = a \cdot 1\,000^2 + b \cdot 1\,000 + c \\ 6\,000 = a \cdot 2\,000^2 + b \cdot 2\,000 + c \end{array}$$

De la primera ecuación se obtendrá que $c = 0$. Entonces, remplazando este valor en las otras ecuaciones, podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l|l} 5\,000 = 1\,000\,000a + 1\,000b & / \cdot -2 \\ 6\,000 = 4\,000\,000a + 2\,000b & \end{array} \qquad \textit{(sumando)}$$

$$\begin{array}{l} -10\,000 = -2\,000\,000a - 2\,000b \\ 6\,000 = 4\,000\,000a + 2\,000b \\ \hline -4\,000 = 2\,000\,000\,a \quad \Rightarrow \quad a = -0.002 \end{array}$$

Remplazando en la primera ecuación del sistema, tenemos que:

$5\,000 = 1\,000\,000 \cdot -0.002 + 1\,000b$

$5\,000 = -2\,000 + 1\,000b$

$7\,000 = 1\,000b \quad \Rightarrow \quad 7 = b$

Así, la función que modela las utilidades la obtendremos al remplazar los valores de a, b y c recién encontrados. En esta función, las utilidades se miden en miles de dólares y p representa la cantidad de artículos producidos. Determínala y verifícala con tu maestro.

b. ¿Entre qué rangos de producción las utilidades crecen?
Para contestar esta pregunta, graficaremos la función en la figura 5.29.

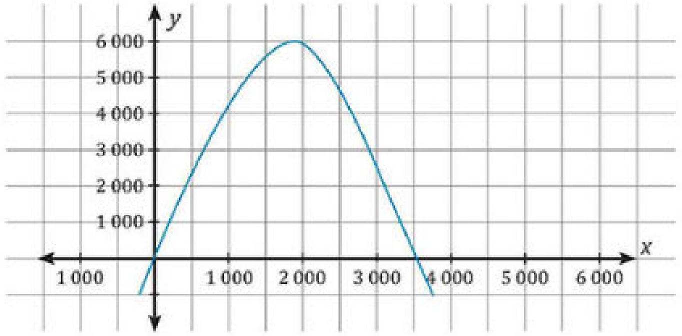


Figura 5.29

Como se aprecia, las utilidades crecerán desde un artículo hasta los 1750 artículos producidos.

c. ¿Entre qué rangos de producción las utilidades decrecen?

Si observas la función recién graficada, puedes establecer el rango de artículos producidos, para el cual las utilidades decrecerán. Determínalo y verifícalo con tu maestro.

5. Silvia trabaja en una empresa ganadera. En los estudios hechos a los cerdos que crían se ha determinado que el peso y la edad de ellos, desde el nacimiento hasta el vigésimo mes, están relacionados por la función

$p = 0.7m + 1.5$, donde p está medido en kilogramos y m en meses. Silvia debe establecer el peso de un lechón cuando este cumpla 1 año y también si es posible que en estas condiciones llegue a pesar 7.3 kilogramos.

Un año corresponde a 12 meses y basta con remplazar este dato en la función que relaciona el peso y la edad de los cerdos.

¿Cuál será el peso del lechón cuando este cumpla un año?

Ahora para saber a qué edad el lechón pesará 7.3 kilógramos, debemos sustituir este valor en la ecuación y despejar la variable m.

¿Cuál es este valor? Verifica tu respuesta con tu maestro y explica este resultado.

Puedes buscar más sobre este tema en los links. Recuperados, marzo 14, 2013, de:
http://amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20Funcion%20Lineal.pdf
http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html

Y para finalizar...

Determina a qué problema corresponde cada gráfica de la figura 5.30. Escribe el número en el recuadro.

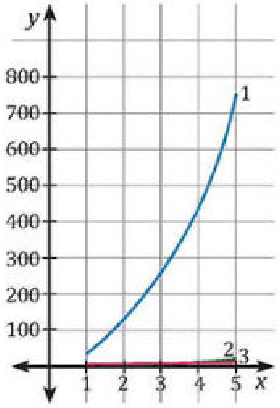


Figura 5.30

- La relación entre la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuya medida de uno de sus catetos es 4 cm y el otro varía de uno en uno, partiendo de 1 cm
- La razón de cambio entre dos variables x e y, cuando $y = 5$ u, versus la variación de x cuyo valor varía de uno en uno a partir de 1 u.
- El volumen de un cilindro en función de la variación de su radio de uno en uno partiendo desde 1 cm, si se sabe que $h = 10$ cm y se aproxima $\pi = 3$.

Verifica tus respuestas con tu maestro.

Comprueba tus conocimientos Tema 3

I. Coloca verdadero (V) o falso (F) frente a cada una de las siguientes afirmaciones y justifica cada una de ellas:

1 El crecimiento de un arbusto durante el tercer año está dado por $l = 108 + 0.09n$, donde l representa la longitud troncal en cm y n el número de meses transcurridos medidos a partir de enero. Luego:

a. ____ En octubre mide menos de 108.9 cm.

B. ____ En junio ha crecido 5,4 mm.

2 Las utilidades de una empresa están dadas por $u = -0.001p^2 + p$, donde las utilidades u se miden en miles de pesos y p es el número de artículos producidos. Entonces:

a. ____ La igualdad $0 = -0.001p^2 + p$ indica que no hay utilidades cuando p solamente es cero.

B. ____ Cuando se producen 500 artículos, la utilidad asciende a 250 000 pesos.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Un gimnasio ofrece dos ofertas distintas. En la primera de ellas cobran \$ 312 por la inscripción y \$ 416 al mes. En la segunda, no se paga matrícula, pero la cuota es de \$ 488 al mes. Determina:

a. La ecuación de la recta que representa la relación meses (x) - costo (y) para cada oferta.

B. ¿Cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de meses que se asista al gimnasio?.

c. El costo para el octavo mes en ambas ofertas.

2 Valerio y Asunción son dos prestigiosos detectives de algún lugar de México. Ellos han pasado varios meses intentando descifrar lo que parece un verdadero acertijo policial: la extraña desaparición de un grupo de jóvenes. Tras contradictorios testimonios de varios testigos, un experto de la investigación ha recibido la siguiente descripción de la ruta posible (figura 5.31), destacada en azul, por donde pudieron haber cruzado. Los puntos en azul son zonas sospechosas que pueden dar interesantes pistas a medida que se alejan de la intersección perpendicular de la carretera y el camino.

Figura 5.31

El experto y ellos piensan en voz alta y se preguntan:

a. ¿Habrá algún modelo matemático que logre describir esta trayectoria?

b. ¿Cuál será su fórmula?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar cómo se usan las funciones lineales y cuadráticas para resolver problemas.			
Entendí los ejemplos resueltos.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un mapa conceptual en el que se señalen las distintas situaciones en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Nociones de probabilidad

Estudiarás en este tema

- Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Observa la siguiente imagen y lee atentamente su descripción:

La ruleta es un juego de azar típico de los casinos, y su nombre viene del término francés *roulette*, que significa "ruedita" o "rueda pequeña". Consta de 36 números (sin el cero). Luego, a mediados del siglo XIX, los hermanos Blanc modificaron la ruleta añadiéndole el número 0.

El objetivo principal de este juego es adivinar en qué número de la rueda caerá la bolita, que cuenta con una amplia variedad de apuestas.

Y para comenzar...

1. Si consideras una ruleta de 36 números, ¿cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número par?, ¿cómo es este valor con respecto a la probabilidad de que la bolita caiga en un número impar? Explica.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número primo? Considera una ruleta de 37 números (desde el 0 al 36).

En grupos de cuatro integrantes realicen la siguiente actividad:

Construyan un tablero de juego donde apliquen el cálculo de las probabilidades, y jueguen con sus compañeros.

Para este juego necesitan dos dados, cuatro fichas de colores distintos para cada uno de los integrantes del grupo, que pueden construir con cartón, y un tablero con 30 casillas, como el que se muestra en la figura 5.32.

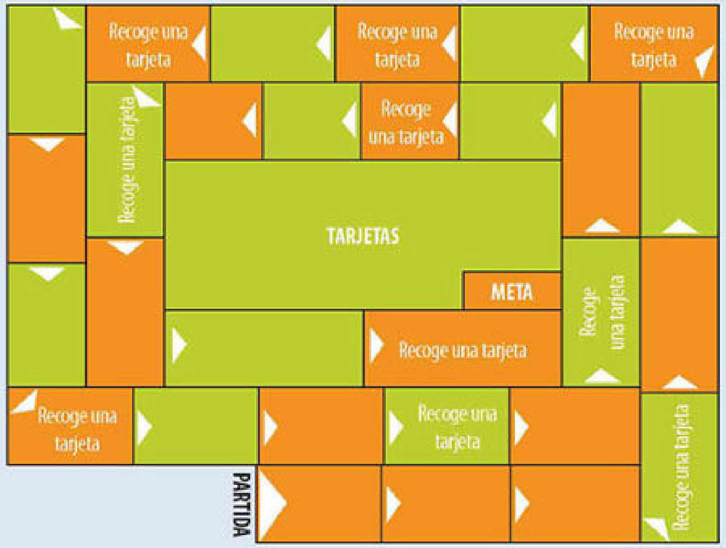


Figura 5.32

Deben confeccionar 30 tarjetas en los que se redacte un problema contextualizado de cálculo de probabilidad. Cada grupo debe responder los problemas y anotar las respuestas al reverso de la tarjeta con ayuda de su maestro, estas tarjetas deben ponerse en el espacio del tablero destinadas para ello, hacia arriba, es decir, sin que se vea la respuesta. Intercambiar juegos entre grupos y comenzar a jugar.

Reglas del juego:

- Cada alumno colocará su ficha en el casillero de partida.
- Cada grupo sorteará el turno de cada uno de los jugadores de su equipo (puede ser lanzando el dado o de otra manera).
- Cada jugador lanzará los dados y si la suma obtenida entre ambos, es un número par, se avanza el número de casillas de acuerdo al resultado obtenido, de lo contrario se pierde el turno.
- Si el jugador cae en una casilla en la que se deba recoger una tarjeta, este debe tomar una tarjeta y realizar el ejercicio escrito en ella, si la respuesta es correcta, este jugador puede volver a jugar en su próximo turno y se quedará con la tarjeta, de lo contrario, pierde su turno y deberá devolver la tarjeta desde donde la sacó, colocándola al último.
- Gana el jugador que llegue primero a la meta.

Para comprender este último tema es necesario que tengas muy claro el cálculo de probabilidades, por lo que te invitamos a realizar esta actividad previa de manera reflexiva y comprensiva.

Eventos equiprobables

Vicente y Lucía están jugando en su casa con un mazo de naipe inglés (figura 5.33). El juego consiste en extraer 3 cartas y contar el puntaje obtenido en ellas, sabiendo que el puntaje de las cartas con número es el mismo que indica el número en ellas y el puntaje de los monos es 12 puntos por cada uno. El primero en sacar sus cartas es Vicente y luego le toca a Lucía. ¿La extracción de cartas de Vicente afectará el puntaje que pueda obtener Lucía?, ¿crees tú que ambos tienen la misma posibilidad de ganar?

Figura 5.33

Tal como lo has pensado, ambos no tienen la misma posibilidad de ganar, pues el puntaje que pueda obtener Lucía depende de las cartas que haya extraído Vicente. Si las cartas de Vicente son bajas, por ejemplo tres ases, Lucía tendría más posibilidades de ganar, pues solo quedaría un as en la baraja y todas las otras cartas serían de mayor valor. En cambio, si Vicente extrajera tres figuras, Lucía no tendría posibilidad de ganar, ya que solo quedaría una figura y las otras cartas serían de menor valor.

¿Es un juego justo para ambos? Lo sería si alternáramos quién extrae las cartas primero. Por ejemplo, si lanzaran una moneda al aire y Vicente comenzara si sale sello y Lucía si sale cara, ambos tendrían la misma posibilidad de iniciar el juego y ninguno de los dos tendría más ventaja. Así, cada uno de ellos tendría la misma posibilidad de escoger la primera vez dentro de todo el mazo. No hay para ninguno de los dos una clara posibilidad de ganarle al otro a priori.

Supongamos ahora que Vicente le propone lanzar dos dados a Lucía y le dice que él ganará si obtiene 7 u 8 en la suma de los puntos que marcan las caras y que ella ganará si obtiene 2 u 11. ¿Crees tú que el juego es justo? ¿Ambos tienen la misma posibilidad de ganar?

Efectivamente, el juego no es justo para Lucía, ya que ella no tiene la misma posibilidad que Vicente de ganar. Calculemos la probabilidad de ganar de cada uno.

Anotemos todos los pares de números que obtenemos al lanzar dos dados y marquemos con rojo los que hacen posible que Vicente gane y con verde los que hacen posible que Lucía gane:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Como lo ves, la probabilidad de ganar de Vicente es:

$P(V)=\frac{11}{36}\approx 0.31=31\%,$

en cambio, la probabilidad de que Lucía gane es:

$P(L)=\frac{3}{36}\approx 0.08=8\%$

¿Qué hace, entonces, que un juego sea justo o no? Diremos que un juego es justo si para todos los participantes la probabilidad de ganar es la misma. Para esto llamaremos **sucesos equiprobables** a aquellos que tienen la misma probabilidad de ocurrir y **sucesos no equiprobables** a aquellos cuya probabilidad de ocurrencia es distinta.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determina si el siguiente suceso es equiprobable o no: *A*: Extraer una bolita blanca de una bolsa que contiene 5 bolitas blancas, 3 azules y 8 verdes. *B*: Extraer un número primo de una bolsa que contiene 30 bolitas numeradas del 1 al 30.

SOLUCIÓN
Procedimiento:

Para calcular la probabilidad de que ocurra el evento *A*, debemos calcular la cantidad total el número de casos totales, que en este caso es 16 ya que el total de bolitas en la bolsa es de 16, y los casos favorables en nuestro caso son 5 dado que en la bolsa hay solo 5 bolitas blancas.

Para el cálculo de la probabilidad del evento *B*, tenemos un total de 30 bolitas, numeradas del 1 al 30, con un total de 10 números primos.

De esta manera, podemos calcular las probabilidades requeridas y determinar la equiprobabilidad de ambos sucesos.

¿Son sucesos equiprobables? Determínalo y verifícalo con tu maestro.

2. Determina si los siguientes juegos son justos o no:

   a. Se lanzan dos dados y se miran sus puntos para calcular la resta (positiva) de ambos resultados. Pedro ganará si obtiene una diferencia de 1 o 2, Juan ganará si obtiene una diferencia de 3 o 4 y Antonio ganará si obtiene una diferencia de 5 o el resultado es 0.

SOLUCIÓN
Procedimiento: Calculemos las probabilidades que cada uno tiene de ganar. Marquemos con rojo los resultados favorables para Pedro, con verde los que son favorables para Juan y con azul los favorables a Antonio:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Sabías que...

Se calcula que entre el 3 y el 4% de la población mexicana padece trastornos de conducta relacionados con el juego, o ludopatía.

La ludopatía es un trastorno compulsivo que llega a convertirse en adicción, al igual que como las drogas y el alcohol, y que hace incapaz a la persona que lo padece de resistirse al impulso de apostar o participar en los juegos de azar.

$P(P) = \frac{18}{36} = 0.5 = 50\%,$

$P(J) = \frac{10}{36} \approx 0.28 = 28\%$ y

$P(A) = \frac{8}{36} \approx 0.22 = 22\%$

Claramente, el juego no es justo, ya que no todos tienen la misma probabilidad de ganar.

b. Fernanda y Marcela tienen una bolsa con bolitas numeradas. La bolsa de Fernanda tiene bolitas numeradas del 1 al 15 y ella ganará si al extraer una de las bolitas esta es un múltiplo de 3. La bolsa de Marcela tiene bolitas numeradas del 1 al 12 y ganará si al extraer una bolita, esta es un número entre 5 y 8, ambos incluidos.

SOLUCIÓN

Procedimiento: Como los múltiplos de 3 entre 1 y 15 son: 3, 6, 9, 12 y 15, podemos calcular entonces la probabilidad de que Fernanda gane.

De la misma manera, los números entre 5 y 8, ambos incluidos, son: 5, 6, 7 y 8, podemos calcular la probabilidad de ganar de Marcela.

Luego, determinamos si ambos valores son iguales o no, y comprobamos si el juego es justo.

Si quieres saber más de este tema, te dejamos aquí algunos links. Recuperados, marzo 20, 2013, de:
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v02/u03t04s01.html
http://mate.dm.uba.ar/~pgroisma/semanamatem.pdf

Y para finalizar...

Vuelvan a jugar con el juego construido al inicio, pero ahora deben sortear el avance de cada integrante de su grupo, según las cuatro posibilidades que se plantean a continuación:

- Al lanzar los dados, la suma obtenida entre ambos, es un número par, se avanza el número de casillas que indique el resultado obtenido, de lo contrario se pierde turno.
- Al lanzar los dados, la suma obtenida entre ambos, es un número impar, se avanza el número de casillas que indique el resultado obtenido, de lo contrario se pierde turno.
- Al lanzar los dados, la suma obtenida entre ambos, es un número primo, se avanza el número de casillas que indique el resultado obtenido, de lo contrario se pierde turno.
- Al lanzar los dados, la suma obtenida entre ambos, es un múltiplo de 3, se avanza el número de casillas que indique el resultado obtenido, de lo contrario se pierde turno.

Las demás reglas del juego son iguales.

Discute con tu grupo: ¿es un juego justo para cada jugador? Explica y justifica.

Comprueba tus conocimientos Tema 4

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda:

1 Dos sucesos son equiprobables si ________________________________.

2 La característica de un juego justo es que ________________________________.

3 Un ejemplo de juego no justo es ________________________________.

II. Resuelve los siguientes ejercicios.

1 Se lanza un dado al aire. Waldo gana si aparece un número primo, Wildo triunfa si aparece un uno o un número par no primo:

a. ¿Es este un juego justo?

b. Inventa otra variación del juego, pero que favorezca a Wildo.

c. Inventa otra variación del juego, pero que se incline a favor de Waldo.

2 ¿Cuál de los siguientes juegos puede ser más justo para Luzmira?

a. Lanzar una moneda y elegir águila.

b. Extraer una esfera de color amarillo desde una bolsa que contiene dos amarillas, una blanca y una roja.

c. Lanzar un dado una y otra vez hasta que aparezca un cinco.

3 ¿Será verdad que en un juego justo la probabilidad de ganar es siempre igual a la probabilidad de perder?

4 Tuco y Tico, los hijos gemelos de la señora Tertulia, están siendo visitados por su primo Taco y deciden jugar al lanzamiento de dos dados y sumar los números obtenidos. Para hacerlo más emocionante, deciden apostar canicas.

–Vamos primos, voy a jugar contra ustedes dos simultáneamente. Creo que me gustaría elegir los números en que yo gane. ¿No les parece justo?

–Naturalmente, primo Taco, Tico no se opone, ¿no es así hermano?

–Pues bien, primos, yo ganaré cada vez que obtenga un 5, un 6, un 7 o un 8.

–Taco nos has dejado todos los otros números para que ganemos. Mira, Tuco, tenemos números más altos que los de él.

Más tarde, las disputas descalificadoras de ambos hermanos contra Taco se escuchan en toda la casa. La señora Tertulia escucha lo siguiente: –Primo Taco, devuélvenos nuestras canicas, porque a pesar de que nos diste ventajas, ganaste en casi todos los juegos. Sospechamos que nos hiciste trampa.

Conforme a la información proporcionada por el relato, responde:

a. ¿Por qué la cantidad mayor de números a favor de los gemelos ha hecho desde la partida de este un juego no justo? Justifica tu respuesta.

b. ¿Será verdad de que la probabilidad de aparición de los números elegidos por Taco ha influido en el éxito frente a sus primos? ¿Por qué?

Criterios de evaluación	Indicadores de logro		
	+	+/–	–
Soy capaz de explicar cuándo dos sucesos o eventos son equiprobables y cuándo no lo son.			
Soy capaz de explicar cuándo un juego de azar es justo y cuándo no lo es.			
Entendí los ejercicios resueltos en esta sección.			
Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.			

Si obtuviste todos los indicadores (+), ¡felicitaciones!; si obtuviste algunos signos (+/–) y (–), realiza un resumen en el que se diferencien los eventos equiprobables y los no equiprobables, además de las características de un juego de azar justo, dando ejemplos en cada caso.

Síntesis Bloque 5

A continuación se presenta un mapa conceptual que resume las ideas más importantes que se han presentado en este bloque. Debes completarlo con los conceptos más importantes abordados.

BLOQUE 5

Las ecuaciones lineales y cuadráticas sirven para resolver problemas de otras áreas como las siguientes:

Conos y cilindros

A partir de los cortes de un cilindro se generan:

El volumen de un cilindro se calcula por:

A partir de los cortes de un cono se generan:

El volumen de un cono se calcula por:

Las funciones lineales y cuadráticas sirven para resolver problemas de áreas como las siguientes:

Dos sucesos son equiprobables si:

Un juego de azar es justo cuando:

Comprueba tus conocimientos Bloque 5

I. Coloca V (verdadero) o F (falso) frente a cada afirmación según corresponda.

1 ____ El cociente entre el triple del cuadrado de x y el cuarenta por ciento del doble de y corresponde a $\dfrac{3x^2}{\left(\frac{40}{100}\right)y}$

2 ____ Basta dar un corte a un cono, que sea paralelo a su altura, para obtener una hipérbola.

3 ____ Sabiendo el perímetro de la base de un cilindro y su altura se puede obtener el valor de su volumen.

4 ____ Hay fenómenos que están modelados por fórmulas que no representan ni una variación lineal, ni tampoco una variación cuadrática.

5 ____ Que aparezca cruz en los lanzamientos al aire de una moneda y que se obtenga un número par en el caso de un dado, constituyen sucesos independientes y equiprobables.

II. Resuelve los siguientes ejercicios y problemas.

1 La suma de dos números es 200. Dividiendo el primero por 16 y el segundo por 10, la diferencia de los cocientes es 6:

a. Escribe las ecuaciones que permiten obtener ambos números.

b. ¿Cuáles son los números?

2 Para cada una de las expresiones algebraicas, inventa dos problemas donde ellas representen la información mencionada en los enunciados. Luego, resuélvelos.

a. $z^2 + 169 = 13z$

b. $1.5x + 2y = 7$
$2.5x + y = 3$

3 La energía cinética de una partícula E_c, es decir, aquella que posee por su movimiento, está modelada por la siguiente ecuación: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es su masa, y v es su velocidad:

a. ¿De qué tipo de variación se trata si la masa es constante? ¿Por qué?

b. Si en la fórmula se conocen la velocidad del cuerpo y la correspondiente energía cinética, ¿es posible saber la masa de dicho cuerpo? Justifica tu respuesta

4 La probabilidad de que Mayra gane en un juego es igual a la probabilidad de que Micaela gane el otro. ¿Será verdad que si el juego justo es el de Micaela, necesariamente en otro juego sea justo para Mayra?

5 ...y así comencé con mi primer carro. El rendimiento era de 6 km por litro de gasolina en la ciudad y de 9 km por litro de gasolina en autopista. Era una situación completamente jocosa. En una oportunidad en que fuimos de vacaciones a Chihuahua, tuvimos que recorrer cerca de 399 km y consumió 40 L.

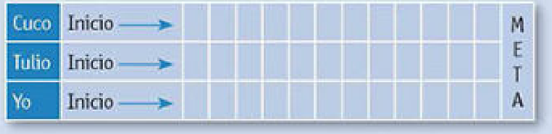
Indica a través de ecuaciones con sus desarrollos los pasos que hay que dar para obtener la cantidad de kilómetros que se recorrieron:

a. en la ciudad.

b. en la autopista.

c. Finalmente, obtén cada uno de esos valores.

6 Con mis amigos comenzamos un juego de carreras improvisado por una vieja cartulina en la que dibujamos una pista. Observa.



Empezamos a lanzar un dado. Si salía impar, no avanzábamos, en caso contrario, lo hacíamos solo una unidad. Pero lo hicimos de manera distinta. Ganaba el que se mantenía mayor tiempo en la pista, o bien el que estaba más cerca del punto de comienzo después de doce tiradas. Aquel que caía en la meta perdía automáticamente.

a. ¿Consideras que da lo mismo jugar cualquier carril? ¿Se tiene la misma probabilidad de ganar? Explica.

b. ¿Habrá algún carril que siempre dé la suerte de ganar? Explica.

1 La expresión $7(2x - 1) + 5 = 8$ representa el enunciado:

- A. 8 equivale a siete veces el doble de un número, disminuido en 1 más 5 unidades.
- B. 8 equivale a siete veces el doble de un número disminuido en 1, más 5.
- C. 8 equivale a siete veces el sucesor del doble de un número aumentado en 5.
- D. 8 equivale a siete veces el antecesor de un número disminuido en 5.

2 Blanca, Rosa y Celeste se dan cuenta de que al sumar sus edades se obtiene 93 años. Rosa dice a Blanca. "Yo tengo los 5/6 de tu edad", y Celeste interrumpe a Rosa manifestándole: "Y yo el cuádruple de la tuya".

Para cada una de las siguientes afirmaciones, marca "De acuerdo" o "En desacuerdo" según corresponda:

	De acuerdo	En desacuerdo
A. La edad de Blanca corresponde a los tres décimos de la edad de Celeste.		
B. Si una de ellas fuera la madre de las otras, esa sería Rosa.		
C. Por lo menos dos de ellas no superan los 18 años de edad.		
D. Dentro de 15 años, a una de ellas le faltarán siete años para cumplir los 40.		

3 De un cono se saben dos medidas lineales que son 62 cm y $2x + 5$ cm, y corresponden a la altura y al radio basal. Se desea que el volumen mida exactamente 119.164 cm^3 considerando $\pi \approx 3$. ¿Cuál es el menor valor de x que permite esta situación?

4 La relación que existe entre la altura de varios cilindros, h, con el respectivo radio basal, r, es la siguiente: $h = 0.5r + 1$, donde el máximo valor de r es 10 cm.

a. ¿Qué tipo de modelamiento se puede establecer entre las variables anteriores?

b. Explica la razón de que no se puedan encontrar cilindros de alturas mayores a seis centímetros.

c. ¿Será verdad que el volumen más pequeño de todos los cilindros posibles es 1 cm^3?

5 En una caja hay x pares de calcetines entre amarillos y verdes, con $x \geq 10$, todos de la misma talla, pero desordenados. Sin mirarlos, se extraen uno a uno hasta formar exactamente un par del mismo color. ¿Cuántos hay que extraer para que la probabilidad de este suceso sea de un ciento por ciento?

Evaluándonos

Autoevaluación

Realiza la autoevaluación sobre tu desempeño, de manera responsable y honesta, pues así puedes establecer actividades remediales para mejorar tu desempeño.

Contenido	Sí lo logré	Me falta mejorar
Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.		
Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.		
Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.		
Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.		
Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.		
Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.		

Heteroevaluación

Pídele a un compañero que valore si:

Actitud	Sí lo hice	Me sugieren mejorar
Colaboré en las actividades grupales, argumentando sobre los procedimientos utilizados.		
Participé activamente en todas las actividades grupales propuestas.		
Cuando tuve que exponer las ideas y resultados del grupo, lo hice claramente, explicando y justificando cada paso realizado.		
Respeté siempre la opinión de mis pares.		
Incorporé las sugerencias, de mis compañeros de grupo como de mi maestro, en mi desempeño.		

Heteroevaluación

Solicita a tu maestro que evalúe tu desempeño, entregándote estrategias para mejorar en el caso que resulte pertinente.

Bibliografía para el maestro

- Allen, A., *Álgebra Intermedia*, 7ª. ed., México D.F., Pearson Educación, 2008.
- Baldor, A., *Álgebra*, 15ª. ed., México, Compañía Cultural Editorial y Distribuidora de Textos Americanos, 1997.
- Kindle, J. H., *Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio*, 1ª. ed. rev., México D.F., Mc Graw- Hill Interamericana, 2007.
- Lacourly, N., *Introducción a la Estadística*, 1ª. ed., Santiago, J.C. Sáez Editor, 2011.
- Lladser, M., *Variables Aleatorias y Simulación Estocástica*, 1ª. ed., Santiago, J.C. Sáez Editor, 2012.
- Masjuán, G., Arenas, F. y Villanueva, F., *Álgebra clásica*, 1ª. ed., Santiago, Universidad Católica de Chile Ediciones, 2008.
- Mercado, C., *Curso de Matemática Elemental I: Algebra*, 11ª. ed., Santiago, Universitaria, 1983.
- Mercado, C., *Curso de Matemática Elemental II*, 9ª. ed., Santiago, Universitaria, 1984 a.
- Mercado, C., *Curso de Matemática Elemental: Geometría*, 5ª. ed., Santiago, Universitaria, 1984 b. (Tomos III y IV)
- Meyer, P. L., *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, 1ª. ed., México D.F., Pearson Educación Addison Wesley Longman de México, 1998.
- Pröschle, F., *Algebra. Curso de Matemáticas Elementales*, edición revisada, Santiago, Edición Occidente, 1997.
- Rich, B., *Algebra Elemental Moderna*, 1ª. ed., México D.F., McGraw Hill Interamericana, 1990. (Serie de Compendios Schaum)
- Romagnoli, P. P., *Probabilidades Doctas con discos, árboles, bolitas y urnas*, 1ª. ed., Santiago, J.C. Sáez Editor, 2011.
- Spiegel, M. R., *Álgebra superior*, 3ª. ed., México D.F., Mac Graw Hill, 2007.
- Spiegel, M. R. y Stephens L. J., *Estadística*, 4ª. ed., México D.F., Mc Graw Hill Educación, 2009.
- Triola, M. F., *Probabilidad y Estadística*, 10ª. ed., México D.F., Pearson Addison Wesley Educación, 2009.

Bibliografía para el alumno

- Baldor, J. Aurelio, *Aritmética Teórico-Práctica*, Madrid, Editorial Códice, 1990.
- Baldor, J. Aurelio, *Geometría plana y del Espacio y Trigonometría*, Edición 1988, Madrid, Compañía Cultural Editorial y Distribuidora de Textos Americanos, 1988.
- Corbalán, Fernando, *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*, Barcelona, Graó, 1995.
- Ernst, Bruno, *El espejo mágico de M.C. Escher*, Köln, Taschen Benedik, 2007.
- Eves, Howard, *Estudio de las geometrías*, México, Editorial Uteha, 1972. (Volumen I)
- Gardner, Martin, *Carnaval matemático*, Madrid, Alianza Editorial, 1980.
- Hall, H.S. y Knight, S.R., *Álgebra Elemental*, España, Editorial Montaner y Simon, 1972.
- Julius, Edward, *Matemáticas rápidas*, Bogotá, Norma, 2002.
- Lipschutz, S. y Lipton M., *Probabilidad*, 2ª. ed., Bogotá, Mc Graw Hill Interamericana, 2001. (Serie de Compendios Schaum)
- Perelman, Yakov, *Matemática recreativa*, Barcelona, Ediciones Martínez de Roca, 1987.
- Rich, B., *Algebra Elemental Moderna*, 1ª. ed., Serie de Compendios Schaum, México D.F., McGraw Hill Interamericana, 1990.
- Spiegel, M. R., *Álgebra superior*, 3ª. ed. México D.F., Mc Graw Hill, 2007. (Serie Schaum)
- Stewart, Ian, *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas*, Barcelona, Gedisa, 1990.
- Taylor, Howard E. y Wade,Thomas L., *Matemáticas básicas*, México, Limusa Wiley, 1971.

Sitios web sugeridos

- Examen canguro animado, el alumno responde el línea las preguntas mediante la selección de una alternativa. De inmediato, se le indica si su respuesta está correcta o no. Recuperada, mayo 25, 2013, de: *http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/anima/*
- En este portal se encuentra variado material preparado por Daniel Perich, profesor de Estado de Matemática y también el aporte de muchos colaboradores a nivel internacional. Se encuentra guías, temas, juegos, descargas, etcétera. Recuperada, mayo 25, 2013, de: *http://www.sectormatematica.cl/*
- Esta página se llama *HOMOTECIAS Y SEMEJANZA*, profundiza la proporcionalidad de segmentos. Se desarrollan ambos temas y muestra las aplicaciones correspondientes. Recuperada, mayo 25, 2013, de: *http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciasysemejanzas/homoteciasysemejanzas.htm*
- El portal de este link corresponde al sitio web Instituto Nacional de Estadística y Geografía y que presenta vasta información de la realidad nacional en diversos aspectos por ej demográficos, económicos, etcétera. Recuperada, mayo 25, 2013, de: *http://www.inegi.org.mx/*

Dirección editorial: Jorge Muñoz Rau
Diseño y coordinación editorial: Equipo Editorial Ediciones Cal y Canto
Concepto y diseño de portada: Cristina Sepúlveda Aravena
Fotografía de portada: 123RF Stock Photos
Diagramación: Pamela Muñoz Moya
Editor: Myriam Andrea Baeza Reyes
Corrección de estilo: Alejandro Cisternas Ulloa
Tablas y gráficos: Pamela Muñoz Moya
Gerencia de Producción: Cecilia Muñoz Rau
Ilustración de interiores: Natalia Benavides Castro p.104 Ilustraciones Ediciones Cal y Canto: pp. 112, 127, 137, 142.
Fotografía: Banco de imágenes Ediciones Cal y Canto: pp. 10, 13, 19, 25-28, 32, 42, 49, 54, 72, 74-75, 83, 87, 96, 112, 127, 132, 137, 152, 154, 164-165, 179, 188-190, 193, 212-213, 228, 242, 248. 123RF Stock Photos: pp. Portada, 9, 18, 28, 65, 106, 115, 124, 154, 167, 174, 215, 245.

Primera edición: marzo de 2014
Cuarta reimpresión: abril de 2018

Matemáticas 3

Insurgentes Sur 1886, Col. Florida,
Delegación Álvaro Obregón,
C. P. 01030, México, D. F.
Tel.: (55) 5128-1350
Fax: (55) 5128-1350 ext. 2899

Ediciones Castillo forma parte de Grupo Macmillan

www.grupomacmillan.com
www.edicionescastillo.com
infocastillo@grupomacmillan.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 3304

ISBN de la serie: 978-607-463-732-8
ISBN: 978-607-463-969-8

Impreso en México/*Printed in México*

Esta obra se terminó de imprimir en abril de 2018
en los talleres de Nombre,
calle número. C. P.
México, D. F.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

ISBN 978-607-463-969-8
9 786074 639698

www.edicionescastillo.com
infocastillo@grupomacmillan.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

macmillan education